Klausur Formale Systeme

Universität Karlsruhe

Fakultät für Informatik

SS 2005

Prof. Dr. P. H. Schmitt

6. April 2005

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikel-Nr.: ______________________

Bitte geben Sie auf jedem benutzten Blatt rechts oben
Ihren Namen und Ihre Matrikel-Nummer an!

A1 (12)	A2 (5)	A3 (6)	A4 (8)	A5 (7)	A6 (10)	A7 (6)	A8 (6)	Σ (60)

Bewertungstabelle bitte frei lassen !!!

Zum Bestehen der Klausur benötigen Sie 20 der erreichbaren 60 Punkte.

Gesamtpunkte:

1 Zur Einstimmung (5 + 5 + 2 Punkte)

Kreuzen Sie in den folgenden Tabellen alles Zutreffende an.

Für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen!
(Dabei werden jedoch keinesfalls weniger als 0 Punkte für jede der drei Teilaufgaben vergeben.)

Hinweise:

- „PL1" steht für „Prädikatenlogik erster Ordnung (mit Gleichheit)"; auf diese beziehen sich auch die Begriffe „erfüllbar", „allgemeingültig" und „unerfüllbar".
- „AL" steht für Aussagenlogik, „LTL" für lineare Temporallogik.
- In Teilaufgabe a. kann eine Formel mehr als eine der genannten Eigenschaften haben.
- p, q, r, s sind Prädikatssymbole, f, g Funktionssymbole (jeweils mit der richtigen Stelligkeit) und x, y sind Variablen.
- Für Klauselmengen C gibt $|C|$ die Anzahl der Literale in C an.
- $\models^{\circ}$ bezeichnet die *lokale* Folgerbarkeitsrelation.
- Eine Interpretation $\mathcal{D}$ heißt Modell einer PL1-Formel F, wenn für jede Variablenbelegung β gilt $val_{\mathcal{D},\beta}(F) = W$.

a.

	<u>keine</u> Formel der PL1	erfüllbar	allgemeingültig	unerfüllbar
$\exists x(\forall x(\neg f(x) = f(x)))$				×
$\forall x(f(x) = c) \to f(f(f(c))) = c$		×	×	
$\forall x(\forall y(p(x) \vee \neg p(y)))$		×		
$\forall x(p(x) = \mathbf{1} \wedge q(x) = \mathbf{1} \to p(x) = q(x))$	×			
$(r \to (s \to r)) \to ((r \to s) \to r)$		×		

b.

	Richtig	Falsch
Wenn $M \models^{\circ} p(x)$, dann $M \models^{\circ} \forall x(p(x))$.		×
Für eine geschlossene Formel F gilt: wenn F kein Modell hat, dann ist F unerfüllbar.	×	
Seien C, D AL-Klauselmengen mit $\|C\| = m$ und $\|D\| = n$. Für alle möglichen Resolventen E von C und D gilt $\|E\| \geq max(m, n) - 1$.	×	
Sei F eine PL1-Formel. Aus der Vollständigkeit des Tableaukalküls folgt, daß ein geschlossenes Tableau für F oder $\neg F$ existiert.		×
Sei F eine beliebige erfüllbare PL1-Formel und σ eine beliebige Substitution. Dann ist auch $\sigma(F)$ erfüllbar.		×

c. Sind folgende LTL-Formeln allgemeingültig, d.h. gelten in allen omega-Strukturen?

LTL-Formel	Ja	Nein
$\Box\Box A \leftrightarrow \Box A$	×	
$\Diamond\Diamond A \leftrightarrow \Diamond A$	×	

2 Regeln für den Tableaukalkül ((3 + 2) Punkte)

Betrachten Sie den dreistelligen aussagenlogischen Operator $\mathit{dimple}(X_1, X_2, X_3)$ definiert durch

$$\mathit{dimple}(X_1, X_2, X_3) \equiv X_1 \rightarrow (X_2 \rightarrow X_3) \ .$$

a. Geben Sie eine korrekte und vollständige Tableauregel an für

$$1 \ \mathit{dimple}(X_1, X_2, X_3) \ .$$

Lösung:

$$\begin{array}{c} 1 \ \mathit{dimple}(X_1, X_2, X_3) \\ \hline 0 \ X_1 \ \big| \ 0 \ X_2 \ \big| \ 1 X_3 \end{array}$$

b. Geben Sie eine korrekte und vollständige Tableauregel an für

$$0 \ \mathit{dimple}(X_1, X_2, X_3) \ .$$

Lösung:

$$\begin{array}{c} 0 \ \mathit{dimple}(X_1, X_2, X_3) \\ \hline 1 \ X_1 \\ 1 \ X_2 \\ 0 \ X_3 \end{array}$$

3 Skolemnormalform (6 Punkte)

Transformieren Sie folgende Formel in Skolemnormalform.

$$\neg\forall x\exists y\forall z[(\forall u(q(u)) \to p(z,y)) \to \neg p(z,x)]$$

Lösung:

1. Schritt: Quantoren nach außen schieben und Matrix in KNF bringen

$$\begin{aligned}
\neg\forall x\exists y\forall z[(\forall u(q(u)) \to p(z,y)) \to \neg p(z,x)] &\equiv \\
\exists x\forall y\exists z\neg[(\forall u(q(u)) \to p(z,y)) \to \neg p(z,x)] &\equiv \\
\exists x\forall y\exists z[(\forall u(q(u)) \to p(z,y)) \land p(z,x)] &\equiv \\
\exists x\forall y\exists z[(\neg\forall u(q(u)) \lor p(z,y)) \land p(z,x)] &\equiv \\
\exists x\forall y\exists z[(\exists u(\neg q(u)) \lor p(z,y)) \land p(z,x)] &\equiv \\
\exists x\forall y\exists z\exists u[(\neg q(u) \lor p(z,y)) \land p(z,x)] &\equiv \\
\exists x\forall y\exists z\exists u[\neg q(u) \land p(z,x) \lor p(z,y) \land p(z,x)] &
\end{aligned}$$

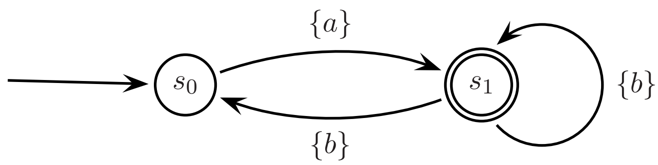
2. Schritt: Skolemisierung

$$\begin{aligned}
\exists x\forall y\exists z\exists u[\neg q(u) \land p(z,x) \lor p(z,y) \land p(z,x)] &\rightsquigarrow \\
\forall y\exists z\exists u[\neg q(u) \land p(z,c) \lor p(z,y) \land p(z,c)] &\rightsquigarrow \\
\forall y\exists u[\neg q(u) \land p(f(y),c) \lor p(f(y),y) \land p(f(y),c)] &\rightsquigarrow \\
\forall y[\neg q(g(y)) \land p(f(y),c) \lor p(f(y),y) \land p(f(y),c)] &
\end{aligned}$$

wobei c eine neue Konstante und f, g neue einstellige Funktionszeichen sind.

4 Büchi-Automaten und LTL (2+2+1+3 Punkte)

Gegeben sei eine Signatur $\Sigma = \{a, b\}$ und folgender Büchi-Automat $\mathcal{B}$ über dem Vokabular $V = 2^\Sigma$ (mit 2^Σ sei die Potenzmenge von Σ bezeichnet).



Sei $L^\omega(\mathcal{B})$ die Menge der von $\mathcal{B}$ akzeptierten omega-Wörter.

Jedes Wort $\xi \in L^\omega(\mathcal{B})$ kann, wie in der Vorlesung gezeigt, als omega-Struktur aufgefaßt werden. Geben Sie an, ob folgende LTL-Formeln über der Signatur Σ in *allen* durch den Büchi-Automaten $\mathcal{B}$ induzierten omega-Strukturen gültig sind oder nicht und begründen Sie Ihre Antwort.

i. $\Diamond\Box b$

Lösung:

Nicht in allen omega-Strukturen gültig! Z.B. gilt $(ab)^\omega \in L^\omega(\mathcal{B})$, aber in der entsprechenden omega-Struktur gilt $\Diamond\Box b$ nicht, da es keinen Zeitpunkt gibt, von dem ab b immer gilt.

ii. $\Box(a \to \Diamond b)$

Lösung:

Gilt in jeder von $\mathcal{B}$ induzierten omega-Struktur, da in allen Wörtern der Sprache $L^\omega(\mathcal{B})$ unendlich viele b vorkommen.

iii. a

Lösung:

Gilt in jeder von $\mathcal{B}$ induzierten omega-Struktur, da alle Wörter der Sprache $L^\omega(\mathcal{B})$ mit a beginnen.

iv. $\Diamond(a \land Xa)$

Lösung:

Gilt (sogar) in keiner von $\mathcal{B}$ induzierten omega-Struktur, da in keinem Wort der Sprache $L^\omega(\mathcal{B})$ zwei a direkt aufeinanderfolgen können.

5 Kurze Konjunktive Normalform (7 Punkte)

Transformieren Sie folgende Formel in die kurze konjunktive Normalform (KKNF).

$$A \to (\neg(B \to A) \to B)$$

Lösung:

1. Schritt: Einführung neuer Atome
Seien P_1, P_2, P_3 neue Atome. Wir definieren:

$$\begin{array}{lcl} P_1 & \leftrightarrow & (B \to A) \\ P_2 & \leftrightarrow & (\neg P_1 \to B) \\ P_3 & \leftrightarrow & (A \to P_2) \\ P_3 & & \end{array}$$

2. Schritt: Transformation der Teilformeln in KNF

$$\begin{array}{rl} P_1 \leftrightarrow (B \to A) & \equiv \\ (P_1 \to (B \to A)) \wedge ((B \to A) \to P_1) & \equiv \\ (P_1 \to (\neg B \vee A)) \wedge (\neg(B \to A) \vee P_1) & \equiv \\ (\neg P_1 \vee \neg B \vee A) \wedge ((B \wedge \neg A) \vee P_1) & \equiv \\ (\neg P_1 \vee \neg B \vee A) \wedge (B \vee P_1) \wedge (\neg A \vee P_1) & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} P_2 \leftrightarrow (\neg P_1 \to B) & \equiv \\ (P_2 \to (\neg P_1 \to B)) \wedge ((\neg P_1 \to B) \to P_2) & \equiv \\ (P_2 \to (\neg\neg P_1 \vee B)) \wedge (\neg(\neg P_1 \to B) \vee P_2) & \equiv \\ (\neg P_2 \vee P_1 \vee B) \wedge ((\neg P_1 \wedge \neg B) \vee P_2) & \equiv \\ (\neg P_2 \vee P_1 \vee B) \wedge (\neg P_1 \vee P_2) \wedge (\neg B \vee P_2) & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} P_3 \leftrightarrow (A \to P_2) & \equiv \\ (P_3 \to (A \to P_2)) \wedge ((A \to P_2) \to P_3) & \equiv \\ (P_3 \to (\neg A \vee P_2)) \wedge (\neg(A \to P_2) \vee P_3) & \equiv \\ (\neg P_3 \vee \neg A \vee P_2) \wedge ((A \wedge \neg P_2) \vee P_3) & \equiv \\ (\neg P_3 \vee \neg A \vee P_2) \wedge (A \vee P_3) \wedge (\neg P_2 \vee P_3) & \end{array}$$

Insgesamt:

$$\begin{array}{l} (\neg P_1 \vee \neg B \vee A) \wedge (B \vee P_1) \wedge (\neg A \vee P_1) \wedge \\ (\neg P_2 \vee P_1 \vee B) \wedge (\neg P_1 \vee P_2) \wedge (\neg B \vee P_2) \wedge \\ (\neg P_3 \vee \neg A \vee P_2) \wedge (A \vee P_3) \wedge (\neg P_2 \vee P_3) \wedge \\ P_3 \end{array}$$

6 Tableaukalkül (10 Punkte)

Zeigen Sie mit dem Tableaukalkül die Allgemeingültigkeit der Formel

$$\forall x(\neg r(x,c)) \land \forall x \forall y(s(x,y) \leftrightarrow \forall z(r(z,x) \to r(z,y))) \to \forall x(s(c,x))$$

wobei c eine Konstante ist.

Lösung:

(1;–) $\mathbf{0}\ \forall x(\neg r(x,c)) \land \forall x \forall y(s(x,y) \leftrightarrow \forall z(r(z,x) \to r(z,y))) \to \forall x(s(c,x))$

(2;1) $\mathbf{1}\ \forall x(\neg r(x,c)) \land \forall x \forall y(s(x,y) \leftrightarrow \forall z(r(z,x) \to r(z,y)))$

(3;1) $\mathbf{0}\ \forall x(s(c,x))$

(4;2) $\mathbf{1}\ \forall x(\neg r(x,c))$

(5;2) $\mathbf{1}\ \forall x \forall y(s(x,y) \leftrightarrow \forall z(r(z,x) \to r(z,y)))$

(6;3) $\mathbf{0}\ s(c,d)$

(7;5) $\mathbf{1}\ \forall y(s(X_1,y) \leftrightarrow \forall z(r(z,X_1) \to r(z,y)))$

(8;7) $\mathbf{1}\ s(X_1,Y_1) \leftrightarrow \forall z(r(z,X_1) \to r(z,Y_1))$

(9;8) $\mathbf{1}\ s(X_1,Y_1) \to \forall z(r(z,X_1) \to r(z,Y_1))$

(10;8) $\mathbf{1}\ \forall z(r(z,X_1) \to r(z,Y_1)) \to s(X_1,Y_1)$

Linker Ast:

(11;10) $\mathbf{0}\ \forall z(r(z,X_1) \to r(z,Y_1))$

(14;11) $\mathbf{0}\ \forall z(r(z,c) \to r(z,d))$

(15;14) $\mathbf{0}\ r(e,c) \to r(e,d)$

(16;15) $\mathbf{1}\ r(e,c)$

(17;15) $\mathbf{0}\ r(e,d)$

(18;4) $\mathbf{1}\ \neg r(X_2,c)$

(19;18) $\mathbf{0}\ r(X_2,c)$

(20;16,19) $CL\ \{X_2/e\}\ *$

Rechter Ast:

(12;10) $\mathbf{1}\ s(X_1,Y_1)$

(13;6,12) $CL\ \{X_1/c, Y_1/d\}\ *$

Mit der Substitution $\{X_1/c,\ Y_1/d,\ X_2/e\}$ sind alle Äste dieses Tableaus geschlossen.

7 Formalisierung in LTL ((1 + 1 + 1 + 3) Punkte)

In einem Gebäude mit 3 Stockwerken (numeriert mit 0, 1 und 2) befindet sich ein Aufzug. In jedem Stockwerk gibt es einen Druckknopf um den Aufzug anzufordern.
Verwenden Sie folgende aussagenlogische Atome für die Formalisierung:

- TK dafür, daß die Tür der Aufzugskabine offen ist
- T_0, T_1, T_3 dafür, daß die Tür zum Aufzugsschacht im 0., 1., bzw. 2. Stockwerk geöffnet ist
- H_0, H_1, H_3 dafür, daß die Aufzugskabine im 0., 1., bzw. 2. Stockwerk anhält
- R_0, R_1, R_2 dafür, daß der Aufzug im 0., 1., bzw. 2. Stockwerk angefordert wird

Formalisieren Sie folgende Sachverhalte in LTL (Lineare Temporallogik).

a. Auf allen Stockwerken gilt, daß die Tür zum Aufzugsschacht nicht geöffnet ist, wenn die Aufzugskabine nicht im entsprechenden Stockwerk anhält.

Lösung:

$$\Box((T_0 \to H_0) \land (T_1 \to H_1) \land (T_2 \to H_2))$$

b. Wenn der Aufzug in einem Stockwerk angefordert wird, dann wird irgendwann die Aufzugskabine im entsprechenden Stockwerk anhalten.

Lösung:

$$\Box((R_0 \to \Diamond H_0) \land (R_1 \to \Diamond H_1) \land (R_2 \to \Diamond H_2))$$

c. Die Aufzugskabine hält immer wieder im Stockwerk 0.

Lösung:

$$\Box\Diamond H_0$$

d. Wenn der Aufzug im Stockwerk 2 angefordert wird, dann fährt die Aufzugskabine ohne anzuhalten dorthin und hält schließlich dort an.

Lösung:

$$\Box(R_2 \to (\mathbf{X}\ (\neg H_0 \land \neg H_1))\ \mathbf{U}\ H_2)$$

Name:
Matr.-Nr.:

Diese Seite ist absichtlich frei gelassen.

Diese Seite ist absichtlich frei gelassen.

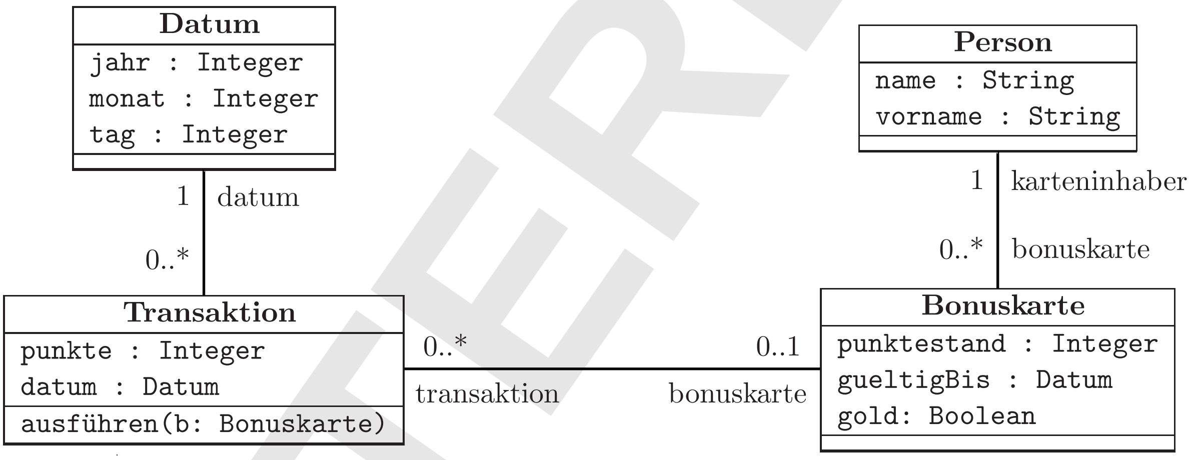


Abbildung zu Aufgabe 8

8 Object Constraint Language (1 + (2 + 3) Punkte)

Das links (auf der Rückseite von Blatt 9) dargestellte UML-Klassendiagramm sei gegeben.

a. Geben Sie eine natürlichsprachliche Übersetzung des folgenden OCL-Constraints an:

```
context Person
inv: self.bonuskarte->size() < 5
```

Lösung:

Jede Person besitzt weniger als fünf Bonuskarten.

b. Geben Sie OCL-Constraints an, die die folgenden Sachverhalte modellieren:

i. Alle Bonuskarten einer Person werden am selben Datum ungültig.

Lösung:

```
context Person
inv: self.bonuskarte->
     select(k:Bonuskarte | k.gültigBis)->size()<=1
```

ii. Für das Ausführen einer Transaktion gilt folgendes:
Wenn die Anzahl der Punkte der Transaktion größer als Null ist, dann sind die Punkte nach Ausführung der Transaktion auf dem Punktestand der als Parameter übergebenem Bonuskarte verbucht (d.h. die Punkte der Transaktion werden auf den Punktestand der Bonuskarte addiert).

Lösung:

```
context Transaktion::ausführen(b: Bonuskarte)
pre: self.punkte > 0
post: b.punktekonto =
      b.punktekonto@pre + self.punkte@pre
```