Musterlösung zum Übungsblatt 2 der Vorlesung " Grundbegriffe der Informatik"

Aufgabe 2.1

a) Nach Definition gilt $R(abbab) = R(a{\cdot}bbab) = R(bbab)a = R(bab)ba = R(ab)bba = R(b)abba = R(b\epsilon)abba = R(\epsilon)babba = \epsilon babba = babba$.

b) Wir führen eine vollständige Induktion über die Wortlänge k durch, das heißt, wir zeigen zuerst, dass für alle Wörter w der Länge $k = 0$ $|R(w)| = |w|$ gilt und zeigen dann, dass für alle Wörter w der Länge $k + 1$ $|R(w)| = |w|$ gilt falls für alle Wörter w' der Länge k $|R(w')| = |w'|$ gilt.

   Induktionsanfang: $k = 0$: Das einzige Wort w der Länge 0 ist das leere Wort ϵ.

   Da $R(\epsilon) = \epsilon$ gilt, folgt $|R(\epsilon)| = |\epsilon|$.

   Induktionsannahme: Für ein festes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt: Für alle Wörter w der Länge k gilt $|R(w)| = |w|$.

   Induktionsschritt: Wenn für alle Wörter w' der Länge k gilt $|R(w')| = |w'|$, dann gilt für alle Wörter w der Länge $k + 1$ $|R(w)| = |w|$.

   Beweis: Sei w ein Wort der Länfe $k + 1$. Dann gibt es ein Wort w' der Länge k und ein Zeichen $x \in A$, so dass $w = xw'$ gilt.

   Es folgt: $|R(w)| = |R(xw')| = |R(w')x| = |R(w')| + |x| = |R(w')| + 1$.

   Nach Induktionsannahme gilt $|R(w')| = |w'|$, und es folgt:

   $|R(w)| = |w'| + 1 = k + 1 = |w|$.

   Damit ist die Behauptung gezeigt.

c) Beispielsweise für Wörter $w \in \{aaaaaaa, aabbbaa, abaaaba, babbbab\}$ gilt $w = R(w)$.

d) Sei $w = x_0x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ ein Wort der Länge 7 so dass $\forall i \in \mathbb{G}_7 : x_i \in A$ und $R(w) = w$ gilt.

   $R(x_0x_1x_2x_3x_4x_5x_6) = R(x_1x_2x_3x_4x_5x_6)x_0 = R(x_2x_3x_4x_5x_6)x_1x_0 = R(x_3x_4x_5x_6)x_2x_1x_0 = \ldots = x_6x_5x_4x_3x_2x_1x_0$.

   Es gilt nun $w = R(w)$ genau dann, wenn $x_0 = x_6, x_1 = x_5$ und $x_2 = x_4$ gilt. Für x_0, x_1, x_2, x_3 sind somit jeweils alle Zeichen aus A möglich, während die Zeichen x_4, x_5, x_6 durch die Wahl von x_0, x_1, x_2 festgelegt sind.

   Somit gibt es $|A|^4$ Wörter w der Länge 7, für die $R(w) = w$ gilt.

e) Wie in Aufgabe c) kann man sich überlegen, dass man die ersten $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ Zeichen eines Wortes w der Länge n, für das $R(w) = w$ gelten soll, frei wählen kann, während die restlichen Zeichen nach der Wahl der ersten $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ Zeichen festgelegt sind.

   Somit gibt es $A^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ Wörter w der Länge n, für die $R(w) = w$ gilt.

   (Hinweis: Solche Wörter heißen *Palindrome*.)

f) Die Abbildung R bildet ein Wort w auf dessen Spiegelbild ab; R spiegelt Wörter.

Aufgabe 2.2

a) Rechenweg 1: $x_5 = 5x_4 - 6x_3$
   $= 5(5x_3 - 6x_2) - 6(5x_2 - 6x_1)$
   $= 5(5(5x_2 - 6x_1) - 6(5x_1 - 6x_0)) - 6(5(5x_1 - 6x_0) - 6x_1)$
   $= 5(5(5(5x_1 - 6x_0) - 6x_1) - 6(5x_1 - 6x_0)) - 6(5(5x_1 - 6x_0) - 6x_1)$
   $= 5(5(5(5 \cdot 5 - 6 \cdot 2) - 6 \cdot 5) - 6(5 \cdot 5 - 6 \cdot 2)) - 6(5(5 \cdot 5 - 6 \cdot 2) - 6 \cdot 5)$
   $= 5(5(5 \cdot 13 - 30) - 6 \cdot 13) - 6(5 \cdot 13 - 30)$
   $= 5(5 \cdot 35 - 6 \cdot 13) - 6 \cdot 35$
   $= 5(175 - 78) - 210$
   $= 5 \cdot 97 - 210 = 485 - 210 = 275$

   Rechenweg 2: $x_5 = 5x_4 - 6x_3$
   $= 5(5x_3 - 6x_2) - 6x_3$
   $= 19x_3 - 30x_2$
   $= 19(5x_2 - 6x_1) - 30x_2$
   $= 65x_2 - 114x_1$
   $= 65(5x_1 - 6x_0) - 114x_1$
   $= 211x_1 - 390x_0 = 211 \cdot 5 - 390 \cdot 2 = 1055 - 780 = 275$

   Rechenweg 3:

   $x_0 = 2$
   $x_1 = 5$
   $x_2 = 5 \cdot 5 - 6 \cdot 2 = 25 - 12 = 13$
   $x_3 = 5 \cdot 13 - 5 \cdot 5 = 65 - 30 = 35$
   $x_4 = 5 \cdot 35 - 6 \cdot 13 = 175 - 78 = 97$
   $x_5 = 5 \cdot 97 - 6 \cdot 35 = 485 - 210 = 275$

b) Wir zeigen mit einer Induktion über n, dass $\forall n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

   $x_n = 2^n + 3^n \wedge x_{n+1} = 2^{n+1} + 3^{n+1}$.

Induktionsanfang: $n = 0$:

$x_0 = 2 = 1 + 1 = 2^0 + 3^0$
$x_1 = 5 = 2 + 3 = 2^1 + 3^1$.

Für den Fall $n = 0$ gilt die Behauptung somit.

Induktionsannahme: Für ein festes n gilt $x_n = 2^n + 3^n \wedge x_{n+1} = 2^{n+1} + 3^{n+1}$

Induktionsschritt: Wenn für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$x_n = 2^n + 3^n \wedge x_{n+1} = 2^{n+1} + 3^{n+1}$,

dann gilt für $n + 1$

$x_{n+1} = 2^{n+1} + 3^{n+1} \wedge x_{n+2} = 2^{n+2} + 3^{n+2}$.

Beweis: Wenn $x_n = 2^n + 3^n \wedge x_{n+1} = 2^{n+1} + 3^{n+1}$ gilt, gilt zwangsweise $x_{n+1} = 2^{n+1} + 3^{n+1}$.

Wenn $x_n = 2^n + 3^n \wedge x_{n+1} = 2^{n+1} + 3^{n+1}$ gilt, folgt

$5x_{n+1} - 6x_n = 5(2^{n+1} + 3^{n+1}) - 6(2^n + 3^n)$
$= 5 \cdot 2^{n+1} + 5 \cdot 3^{n+1}) - 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1}$
$= 2 \cdot 2^{n+1} + 3 \cdot 3^{n+1} = 2^{n+2} + 3^{n+2}$.

Wegen $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$ folgt $x_{n+2} = 2^{n+2} + 3^{n+2}$.

Somit gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$x_n = 2^n + 3^n \wedge x_{n+1} = 2^{n+1} + 3^{n+1}$,

und insbesondere gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$: $x_n = 2^n + 3^n$, wie zu beweisen war.

c) In diesem Fall gilt $\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_n = 3^n - 2^n$.

Dies kann man ebenso wie in Teilaufgabe b) nachrechnen.

Aufgabe 2.2

a) $L_1 = L_0 \cup \{awb \mid w \in L_0\} = \{\epsilon\} \cup \{a\epsilon b\} = \{\epsilon, ab\}$

b) $L_2 = \{\epsilon, ab, aabb\}$, $L_3 = \{\epsilon, ab, aabb, aaabbb\}$, $L_4 = \{\epsilon, ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb\}$.

c) $L_n = \{a^k b^k \mid 0 \leq k \leq n\}$