Musterlösung zum Übungsblatt 4 der Vorlesung " Grundbegriffe der Informatik"

Aufgabe 4.1

a) aabaaaba $\in L^*$, da aabaaaba $=$ (aaba)(aaba) und aaba $\in L$.

b) baaaaba $\in L^*$, da baaaaba $=$ (ba)(aaaba) und ba $\in L$ und aaaba $\in L$.

c) aabba $\notin L^*$.

d) aaababaaaaba $\in L^*$, da aaababaaaaba $=$ (aaaba)(ba)(aaaba) und ba $\in L$ und aaaba $\in L$.

Aufgabe 4.2

Sei k die Anzahl der Vorkommen von b in einem Wort $w \in \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^*$.
Induktionsanfang: $k = 1$: In diesem Fall lässt sich das Wort w aufteilen in $w = w_1 \cdot \mathrm{b} \cdot w_2$, wobei w_1 und w_2 keine b enthalten und somit in $\{\mathrm{a}\}^*$ liegen.
Damit gilt $w \in \{\mathrm{a}\}^*\{\mathrm{b}\}\{\mathrm{a}\}^*$ und somit auch $w \in (\{\mathrm{a}\}^*\{\mathrm{b}\}\{\mathrm{a}\}^*)^* = L$.
Induktionsannahme: Für ein festes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass alle Wörter über $\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^*$, die genau k mal das Zeichen b enthalten, in L liegen.
Induktionsschritt: Wir betrachten ein Wort w, das genau $k+1$ mal das Zeichen b enthält. Dann kann man w zerlegen in $w = w_1 w_2$, wobei w_1 genau einmal das Zeichen b enthält und w_2 genau k mal das Zeichen b.
Wie gezeigt, liegt w_1 in $\{\mathrm{a}\}^*\{\mathrm{b}\}\{\mathrm{a}\}^*$. Nach Induktionsvoraussetzung liegt w_2 in $(\{\mathrm{a}\}^*\{\mathrm{b}\}\{\mathrm{a}\}^*)^*$, was bedeutet, dass es ein $i \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass $w_2 \in (\{\mathrm{a}\}^*\{\mathrm{b}\}\{\mathrm{a}\}^*)^i$ gilt.
Somit liegt $w = w_1 w_2$ in
$(\{\mathrm{a}\}^*\{\mathrm{b}\}\{\mathrm{a}\}^*)(\{\mathrm{a}\}^*\{\mathrm{b}\}\{\mathrm{a}\}^*)^i = (\{\mathrm{a}\}^*\{\mathrm{b}\}\{\mathrm{a}\}^*)^{i+1} \subseteq (\{\mathrm{a}\}^*\{\mathrm{b}\}\{\mathrm{a}\}^*)^* = L$,
und die Behauptung ist gezeigt.

Aufgabe 4.3

a) $\{\mathrm{a}\}\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^*$.

b) $\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^*\{\mathrm{a}\}\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^*\{\mathrm{a}\}\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^*\{\mathrm{a}\}\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^*$

c) $\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^*\{\mathrm{baa}\}\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^*$

d) $\{\mathrm{a}\}^* \cup \{\mathrm{a}\}^*\{\mathrm{b}\}\{\mathrm{b}\}^*(\{\mathrm{ab}\}\{\mathrm{b}\}^*)^* \cup \{\mathrm{a}\}^*\{\mathrm{b}\}\{\mathrm{b}\}^*(\{\mathrm{ab}\}\{\mathrm{b}\}^*)^*\{\mathrm{a}\}$

Aufgabe 4.4

a)

Länge	0	1	2	3	4	5
Anzahl der Wörter in L	1	1	2	3	5	8

Die entsprechenden Wörtermengen sind $\{\epsilon\}$, $\{\mathrm{b}\}$, $\{\mathrm{aa}, \mathrm{bb}\}$, $\{\mathrm{bbb}, \mathrm{baa}, \mathrm{aab}\}$, $\{\mathrm{bbbb}, \mathrm{bbaa}, \mathrm{baab}, \mathrm{aaaa}, \mathrm{aabb}\}$, $\{\mathrm{bbbbb}, \mathrm{bbbaa}, \mathrm{bbaab}, \mathrm{baaaa}, \mathrm{baabb}, \mathrm{aabbb}, \mathrm{aabaa}, \mathrm{aaaab}\}$.

b) Wir zeigen zuerst: Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \geq 2$ gilt: Jedes Wort w in $L \cap \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^k$ liegt auch in $\{\mathrm{aa}\}(L \cap \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^{k-2}) \cup \{\mathrm{b}\}(L \cap \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^{k-1})$:

1. Fall: w beginnt mit dem Zeichen a. Da kein einzelnes a in in einem Wort aus L von einem b gefolgt sein kann, muss auch das zweite Zeichen ein a sein.

Das Wort w lässt sich also zerlegen in $w = (\mathrm{aa})w'$, wobei $|w'| = k - 2$ gelten muss.

Weiterhin gibt es ein $i \in \mathbb{N}_0$, so dass $w \in \{\mathrm{aa}, \mathrm{b}\}^i$ gilt. Es muss $i \geq 0$ gelten, und wir erhalten $w \in \{\mathrm{aa}, \mathrm{b}\}\{\mathrm{aa}, \mathrm{b}\}^{i-1}$.

Da w mit aa beginnt, folgt, dass $w \in \{\mathrm{aa}\}\{\mathrm{aa}, \mathrm{b}\}^{i-1} \subseteq \{\mathrm{aa}\}L$ gilt und $w' \in L$ folgt.

Damit liegt w in $\{\mathrm{aa}\}(L \cap \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^{k-2}) \subseteq \{\mathrm{aa}\}(L \cap \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^{k-2}) \cup \{\mathrm{b}\}(L \cap \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^{k-1})$.

2. Fall: w beginnt mit dem Zeichen b.

Das Wort w lässt sich also zerlegen in $w = (\mathrm{b})w'$, wobei $|w'| = k - 1$ gelten muss.

Weiterhin gibt es ein $i \in \mathbb{N}_0$, so dass $w \in \{\mathrm{aa}, \mathrm{b}\}^i$ gilt. Es muss $i \geq 0$ gelten, und wir erhalten $w \in \{\mathrm{aa}, \mathrm{b}\}\{\mathrm{aa}, \mathrm{b}\}^{i-1}$.

Da w mit b beginnt, folgt, dass $w \in \{\mathrm{b}\}\{\mathrm{aa}, \mathrm{b}\}^{i-1} \subseteq \{\mathrm{b}\}L$ gilt und $w' \in L$ folgt.

Damit liegt w in $\{\mathrm{b}\}(L \cap \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^{k-1}) \subseteq \{\mathrm{aa}\}(L \cap \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^{k-2}) \cup \{\mathrm{b}\}(L \cap \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^{k-1})$.

Nun zeigen wir, dass für $k \geq 2$ jedes Wort $w \in \{\mathrm{aa}\}(L \cap \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^{k-2}) \cup \{\mathrm{b}\}(L \cap \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^{k-1})$ auch in $L \cap \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^k$ liegt:

1. Fall: Sei $w \in \{\mathrm{aa}\}(L \cap \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^{k-2})$. Dann gibt es ein Wort w' der Länge $k-2$, das in L liegt und für das einerseits $w = \mathrm{aa}w'$ und andererseits $\exists i \in \mathbb{N}_0 : w' \in \{\mathrm{aa}, \mathrm{b}\}^i$ gilt.

Damit gilt: $|w| = |\mathrm{aa}| + |w'| = 2 + k - 2 = k$ und $w \in \{\mathrm{aa}\}\{\mathrm{aa}, \mathrm{b}\}^i \subseteq \{\mathrm{aa}, \mathrm{b}\}\{\mathrm{aa}, \mathrm{b}\}^i = \{\mathrm{aa}, \mathrm{b}\}^{i+1} \subseteq L$.

Somit gilt $w \in L \cap \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^k$.

2. Fall: Sei $w \in \{\mathrm{b}\}(L \cap \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^{k-1})$. Dann gibt es ein Wort w' der Länge $k-1$, das in L liegt und für das einerseits $w = \mathrm{b}w'$ und andererseits $\exists i \in \mathbb{N}_0 : w' \in \{\mathrm{aa}, \mathrm{b}\}^i$ gilt.

Damit gilt: $|w| = |\mathrm{b}|+|w'| = 1+k-1 = k$ und $w \in \{\mathrm{b}\}\{\mathrm{aa}, \mathrm{b}\}^i \subseteq \{\mathrm{aa}, \mathrm{b}\}\{\mathrm{aa}, \mathrm{b}\}^i = \{\mathrm{aa}, \mathrm{b}\}^{i+1} \subseteq L$.

Somit gilt $w \in L \cap \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^k$.

Damit sind die beiden Mengen gleich.

c) Die Menge $\{\mathrm{aa}\}(L \cap \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^k)$ enthält F_k Elemente, die Menge $\{\mathrm{b}\}(L \cap \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^{k+1})$ enthält F_{k+1} Elemente.

Da beide Mengen disjunkt sind, enthält ihre Vereinigung (die nach Teilaufgabe b) gerade $L \cap \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^{k+2}$ ist), genau $F_k + F_{k+1}$ Elemente.

Somit gilt: $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$.