Musterlösung zum Übungsblatt 5 der Vorlesung " Grundbegriffe der Informatik"

Aufgabe 5.1

a) $G = (\{S\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}, S,$
   $P = \{S \rightarrow \mathrm{a}S\mathrm{a} \mid \mathrm{b}S\mathrm{b} \mid \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid \epsilon\})$

b) $S \Rightarrow \mathrm{b}S\mathrm{b} \Rightarrow \mathrm{ba}S\mathrm{ab} \Rightarrow \mathrm{baaab}$

c) $S \Rightarrow \mathrm{a}S\mathrm{a} \Rightarrow \mathrm{ab}S\mathrm{ba} \Rightarrow \mathrm{aba}S\mathrm{aba} \Rightarrow \mathrm{abaaaba}$

d) Sei w ein Palindrom über $\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$. Wir zeigen durch Induktion über $n = |w|$, dass alle Palindrome gerader Länge aus S abgeleitet werden können. Die Induktionsannahme soll sein: Alle Palindrome der Länge n und der Länge $n + 1$ sind aus S ableitbar.

   Induktionsanfang: $n = 0$: Das leere Wort ϵ ist in einem Schritt aus S ableitbar.

   Die einzigen Wörter aus $\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^*$ der Länge 1 sind a und b.

   Es gibt die Ableitungen $S \Rightarrow \mathrm{a}$ und $S \rightarrow \mathrm{b}$.

   Induktionsannahme: Für ein festes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass alle Palindrome der Länge n und alle Palindrome der Länge $n + 1$ aus S abgeleitet werden können.

   Induktionsschritt: Dann sind auch alle Palindrome der Länge $n + 1$ und alle Palindrome der Länge $n + 2$ aus S ableitbar:

   Nach Induktionsannahme sind alle Palindrome der Länge $n+1$ aus S ableitbar.

   Sei w ein Palindrom der Länge $n + 2$. Das erste (und damit auch das letzte) Zeichen sei a. Dann gibt es ein $w' \in \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^*$, so dass $w = \mathrm{a}w'\mathrm{a}$ ist.

   Da w ein Palindrom ist, Gilt für $0 \leq i \leq n + 1 : w(i) = w(n + 1 - i)$. Daraus folgt, dass auch für $0 \leq i \leq n - 1$ gilt: $w'(i) = w'(n - 1 - i)$,und damit ist auch auch w' ein Palindrom. Weiterhin gilt $|w'| = n$. Nach Induktionsannahme gibt es somit eine Ableitung $S \Rightarrow^* w'$.

   Somit gibt es die Ableitung $S \Rightarrow aSa \Rightarrow^* aw'a = w$, und $w \in L(G)$ folgt.

   Entsprechendes gilt, wenn das erste Zeichen von w ein b ist.

Aufgabe 5.2

a) Wir zeigen, dass für jedes aus S ableitbare Wort $w \in \{S, \mathrm{a}, \mathrm{b}\}^*$ gilt: $N_a(w) = N_b(w)$. Dies wird durch eine Induktion über die Ableitungslänge k gezeigt.

Induktionsanfang: $k = 0$: Aus S lässt sich mit 0 Schritten nur S ableiten, und $N_a(S) = N_b(S) = 0$.

Induktionsannahme: Für ein festes k gilt: Jedes Wort $w \in \{S, \mathrm{a}, \mathrm{b}\}^*$, dass sich in k Schritten aus S ableiten lässt, erfüllt $N_a(w) = N_b(w)$.

Induktionsschritt: Wenn die Induktionsannahme gilt, erfüllen auch alle Wörter $w' \in \{S, \mathrm{a}, \mathrm{b}\}^*$ die Gleichung $N_a(w') = N_b(w')$.

Nach k Ableitungsschritten haben wir ein Wort $w \in \{S, \mathrm{a}, \mathrm{b}\}^*$, aus dem wir ein weiteres Wort w' ableiten können; somit muss w mindestens ein S enthalten.

Es gibt also $w_1 \in \{S, \mathrm{a}, \mathrm{b}\}^*, w_2 \in \{S, \mathrm{a}, \mathrm{b}\}^*$, so dass $w = w_1 S w_2$ und $w' \in \{w_1\}\{SS, \mathrm{a}S\mathrm{b}, \mathrm{b}S\mathrm{a}, \epsilon\}\{w_2\}$ gilt.

1. Fall: $w' \in \{w_1 SS w_2, w_1 w_2\}$: In diesem Fall gilt $N_a(w') = N_a(w_1) + N_a(w_2) = N_a(w_1 S w_2)$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $N_a(w_1 S w_2) = N_b(w_1 S w_2)$, und es folgt:

$N_a(w') = N_a(w_1 S w_2) = N_b(w_1 S w_2) = N_b(w_1) + N_b(w_2) = N_b(w')$.

2. Fall: $w' \in \{w_1 \mathrm{a}S\mathrm{b} w_2, w_1 \mathrm{b}S\mathrm{a} w_2\}$: In diesem Fall gilt $N_a(w') = N_a(w_1) + 1 + N_a(w_2) = 1 + N_a(w_1 S w_2)$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $N_a(w_1 S w_2) = N_b(w_1 S w_2)$, und es folgt:

$N_a(w') = 1 + N_a(w_1 S w_2) = 1 + N_b(w_1 S w_2) = N_b(w_1) + 1 + N_b(w_2) = N_b(w')$.

Damit ist die Behauptung gezeigt.

Da jedes Wort in $L(G)$ aus S ableitbar ist, folgt die Behauptung der Aufgabenstellung.

b) Wir zeigen durch Induktion über die Wortlänge n, dass jedes Wort $w \in \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^*$ mit $N_a(w) = N_b(w)$ aus S ableitbar ist:

Induktionsanfang: $n = 0$: ϵ ist aus S ableitbar.

Induktionsannahme: Es gibt ein festes $n \in \mathbb{N}_0$, so dass alle Wörter $w \in \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^*$, für die $N_a(w) = N_w(b)$ gilt und die **höchstens** die Länge n haben, aus S ableitbar sind.

Induktionsschritt: Dann gilt dies auch für alle Wörter $w \in \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^*$, für die $N_a(w) = N_w(b)$ gilt und die **höchstens** die Länge $n + 1$ haben:

Falls $|w| \leq n$, folgt diese Aussage direkt aus der Induktionsannahme.

Sei im Folgenden also $|w| = n + 1$:

1. Fall: $w(0) \neq w(n)$: In diesem Fall gibt es ein $w' \in \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^*$, so dass gilt:

$w = \mathrm{a}w'\mathrm{b}$ oder $w = \mathrm{b}w'\mathrm{a}$.

Es muss dann gelten $N_a(w')N_a(w) - 1 = N_b(w) - 1 = N_b(w')$, und da $|w'| < |w|$ gilt, folgt, dass w' aus S ableitbar ist.

Es gibt also eine Ableitung $S \Rightarrow \mathrm{a}S\mathrm{b} \Rightarrow^* \mathrm{a}w'\mathrm{b} = w$ beziehungsweise eine Ableitung $S \Rightarrow \mathrm{b}S\mathrm{a} \Rightarrow^* \mathrm{b}w'\mathrm{a} = w$.

Somit ist auch w aus S ableitbar.

2. Fall: $w(0) = w(n)$:

Wir definieren $c : \mathbb{G}_{n+1} \to \mathbb{Z}$,

$$i \to \begin{cases} 1 & \text{falls } w(i) = w(0) \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $s : \mathbb{G}_{n+1} \to \mathbb{Z}, s(i) = \sum_{k=0}^{i} c(k)$.

Nach Voraussetzung gilt $s(n) = 0$, da das Zeichen $w(0)$ ebenso oft in w vorkommt wie das andere Zeichen aus $\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^*$.

Weiterhin gilt $s(0) = 1 > 0$und $s(n) = s(n-1) + c(n) = s(n-1) + 1 \Rightarrow s(n-1) = -1 < 0$.

Da anfangs der Wert von s größer als 0 ist und eine Stelle vor Ende kleiner als 0 ist, muss es eine Stelle $j \in \mathbb{G}_{n-1}$ geben, für die gilt $s(j) = 0$.

Sei $w_1 = w(0) \cdots w(j)$ und w_2 das Wort in $\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^*$, für das $w = w_1 w_2$ gilt.

Dann gilt, da $s(j) = 0$ gilt, $N_a(w_1) = N_b(w_1)$ und wegen $N_a(w) = N_b(w)$ und $N_a(w_1 w_2) = N_a(w_1) + N_a(w_2)$ und $N_b(w_1 w_2) = N_b(w_1) + N_b(w_2)$ folgt:

$N_a(w_2) = N_a(w) - N_a(w_1) = a_b(w) - N_b(w_1) = N_b(w_2)$.

Sowohl w_1 als auch w_2 haben höchstens die Länge $n - 1$ und sind somit nach Induktionsvoraussetzung aus S ableitbar.

Somit gibt es eine Ableitung $S \Rightarrow SS \Rightarrow^* w_1 S \Rightarrow^* w_1 w_2 = w$.

Somit ist auch w aus S ableitbar, und damit ist der Induktionsschritt gezeigt.

Aufgabe 5.3

a) $S \circ R = S$.

b) Wir müssen einerseits zeigen, dass jedes Paar $(a, b) \in S$ auch in $S \circ R$ liegt, und andererseits zeigen, dass jedes Paar $(a, b) \in S \circ R$ auch in S liegt.

- $(a,b) \in S \Rightarrow (a,b) \in S \circ R$:

  Sei $(a,b) \in S$.

  Es gilt: a teilt a, und somit gilt $(a,a) \in R$.

  Damit $(a,b) \in S \circ R$ gilt, muss es ein $c \in \mathbb{N}_0$ geben, für das $(a,c) \in R$ und $(c,b) \in S$ gilt.

  Für $c = a$ sind beide Bedingungen erfüllt, und somit gilt $(a,b) \in S \circ R$.

- $(a,b) \in S \circ R \Rightarrow (a,b) \in S$:

  Sei $(a,b) \in S \circ R$.

  Dann gilt: $\exists c \in \mathbb{N}_0 : (a,c) \in R \wedge (c,b) \in S$.

  Sei $d = ggT(a,b)$. Dann ist d ein Teiler von a, und da a ein Teiler von c ist, ist auch d ein Teiler von c.

  Damit ist d aber ein gemeinsamer Teiler von c und b, und da der größte gemeinsame Teiler von c und b 1 ist, folgt, dass $d = 1$ gelten muss.

  Somit folgt $(a,b) \in S$.

c) $R \circ S = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

d) Offensichtlich liegt jedes Paar (a,b) aus $R \circ S$ auch in $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

Sei $(a,b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ und $c = 1$.

Dann gilt: $ggT(a,c) = 1$ und c teilt b, also $(a,c) \in S \wedge (c,b) \in R$ und damit folgt

$(a,b) \in R \circ S$.