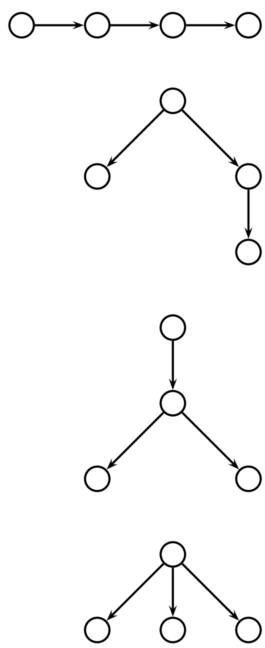
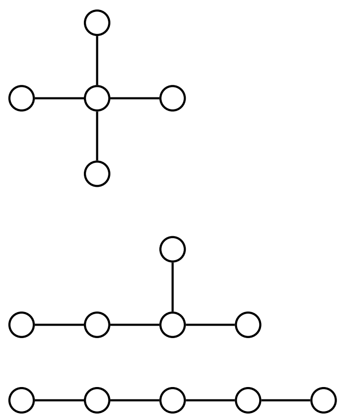
Musterlösung zum Übungsblatt 7 der Vorlesung " Grundbegriffe der Informatik"

Aufgabe 7.1



a)



b)

Aufgabe 7.2

a) Der folgende Zyklus enthält jeden Knoten genau einmal:

$(000, 001, 011, 111, 110, 101, 010, 100, 000)$

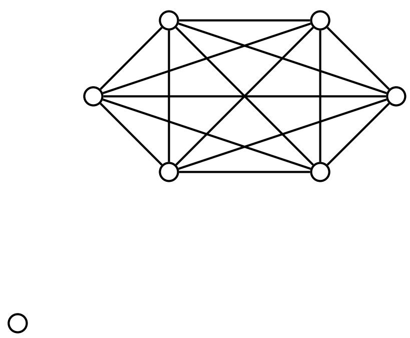
b) Der folgende Pfad enthält jede Kante genau einmal:

$(000, 000, 001, 011, 111, 111, 110, 101, 011, 110, 100, 001, 010, 101, 010, 100, 000)$.

Aufgabe 7.3

a) Ein nicht zusammenhängender Graph mit $n > 1$ Knoten kann höchstens $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Kanten enthalten; ein Graph mit einem Knoten ist immer zusammenhängend, unabhängig von der Anzahl der Kanten. (Letzteres gibt einen Bonuspunkt.)

b) So ein Graph besteht aus zwei "Teilen": einem einzelnen isolierten Knoten und den anderen Knoten, die paarweise durch Kanten verbunden sind.



Aufgabe 7.4

a) Induktion über k:

Induktionsanfang: $k = 0$: Es gibt in jedem Graphen einen Pfad der Länge 0.

Induktionsannahme: Für ein festes k gibt es in G einen Pfad der Länge k.

Induktionsschritt: Dann muss es auch einen Pfad der Länge $k + 1$ in G geben.

Beweis: Sei $(v_0, \ldots, v_k)$ ein Pfad der Länge k, den es nach Induktionsannahme in G geben muss. Da jeder Knoten in G einen Ausgangsgrad größer oder gleich 1 besitzt, besitzt auch v_k einen Ausgangsgrad größer oder gleich 1.

Also muss es ein $w \in V$ mit $(v_k, w) \in E$ geben, und es gibt den Pfad $(v_0, \ldots, v_k, w)$ der Länge $k + 1$ in G.

b) Wir betrachten einen Pfad $(v_0, \ldots, v_k)$ der Länge $k = |V|$ in G. Weil $\{v_0, \ldots, v_k\} \subseteq V$ gilt, folgt $|\{v_0, \ldots, v_k\}| \leq |V|$.

Da auf dem Pfad jedoch $|V| + 1$ Knoten liegen, muss mindestens einer der Knoten $v_0, \ldots, v_k$ mindestens zweimal vorkommen.

Wir setzen $l = \min\{j - i : v_i = v_j \wedge j > i\}$ und wählen einen Knoten $v_i \in \{v_0, \ldots, v_k\}$, für den $v_{i+l} = v_i$ gilt.

Dann gilt: $(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{i+l})$ ist ein einfacher Zyklus, da es der Minimlaität von l widersprechen würde, wenn es zwei verschiedene Knoten $v_x, v_y \in \{v_i, \ldots, v_{i+l}\}$ gäbe, für die $v_x = v_y$ gilt.

(Hinweis: Die Feststellung, dass ein Knoten doppelt vorkommen muss, ist nahezu hinreichend.)