

## Lösungen zu den Aufgaben von Anfang August

### Aufgabe 24

Die Wahrheitswerte von  $A \vee \neg A \Rightarrow B$  und  $B$  sind immer gleich:

Der Wahrheitswert von  $A \vee \neg A$  ist immer *wahr*, da immer entweder  $A$  oder  $\neg A$  den Wahrheitswert *wahr* hat.

Betrachtet man die Tabelle für die Wahrheitswerte von  $C \Rightarrow B$ , stellt man fest, dass der Wahrheitswert immer gleich dem Wahrheitswert von  $B$  ist, falls der Wahrheitswert von  $C$  *wahr* ist:

| $C$ | $B$ | $C \Rightarrow B$ |
|-----|-----|-------------------|
| 0   | 0   | 1                 |
| 0   | 1   | 1                 |
| 1   | 0   | 0                 |
| 1   | 1   | 1                 |

Damit ist die Behauptung gezeigt.

Der Wahrheitswerte von  $A \wedge \neg A \Rightarrow B$  ist immer *wahr*:

Der Wahrheitswert von  $A \wedge \neg A$  ist immer *falsch*, da immer entweder  $A$  oder  $\neg A$  den Wahrheitswert *falsch* hat.

Betrachtet man die Tabelle für die Wahrheitswerte von  $C \Rightarrow B$ , stellt man fest, dass der Wahrheitswert immer wahr ist, falls der Wahrheitswert von  $C$  *falsch* ist:

| $C$ | $B$ | $C \Rightarrow B$ |
|-----|-----|-------------------|
| 0   | 0   | 1                 |
| 0   | 1   | 1                 |
| 1   | 0   | 0                 |
| 1   | 1   | 1                 |

Damit ist die Behauptung gezeigt.

### Aufgabe 25

Die Funktion  $F : A^* \rightarrow A^*$  wird rekursiv definiert durch:

$$F(\epsilon) = \epsilon$$

$$\forall w \in A^* x \in A : F(wx) = F(w)f(x).$$

Äquivalent zur zweiten Zeile:

$$\forall w \in A^* x \in A : F(xw) = f(x)F(w).$$

### Aufgabe 26

a)  $x_8 = 2, x_9 = 3, x_{10} = 4, x_{11} = 6, x_{12} = 9, x_{13} = 13.$

b) Vergleichswerte: 2, 3, 4, 6, 8, 12

Die Werte von  $x_8$  bis  $x_{13}$  sind jeweils mindestens so groß wie die Vergleichswerte. Dies kann zur Vermutung führen:

Für  $n \in \mathbb{N}^+$  gilt:  $x_{2n+6} \geq 2^n$  und  $x_{2n+7} \geq 2^n + 2^{n-1}$ .

c) Nein.

d) Wir zeigen zuerst, dass für alle  $n \in \mathbb{N}^+$  gilt:  $x_{2n+6} \geq 2^n$  und  $x_{2n+7} \geq 2^n + 2^{n-1}$  und  $x_{2n+8} \geq 2^{n+1}$ .

Induktionsanfang:  $i = 1$ :

$$x_{2 \cdot 1 + 6} = x_8 = 2 \geq 2^1$$

$$x_{2 \cdot 1 + 7} = x_9 = 3 \geq 2^1 + 2^0$$

$$x_{2 \cdot 1 + 8} = x_{10} = 4 \geq 2^{1+1}$$

Induktionsannahme: Die Behauptung gilt für ein festes  $n \in \mathbb{N}^+$ .

Induktionsschritt: Dann gilt die Behauptung auch für  $n + 1$ :

$$x_{2 \cdot (n+1) + 6} = x_{2n+8} \geq 2^{n+1} \text{ nach Induktionsvoraussetzung}$$

$$x_{2 \cdot (n+1) + 7} = x_{2n+9} = x_{2n+8} + x_{2n+6} \geq 2^{n+1} + 2^n = 2^{n+1} + 2^{n+1-1} \text{ nach Induktionsvoraussetzung}$$

$$x_{2 \cdot (n+1) + 8} = x_{2n+10} = x_{2n+9} + x_{2n+7} = x_{2n+8} + x_{2n+7} + x_{2n+6} \geq 2^{n+1} + (2^n + 2^{n-1}) + 2^n \text{ nach Induktionsvoraussetzung.}$$

$$2^{n+1} + (2^n + 2^{n-1}) + 2^n \geq 2^{n+1} + 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} = 2^{n+1+1}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

Insbesondere gilt für gerade  $n \geq 8$ :  $x_n \geq 2^{\frac{n-6}{2}}$ .

Angenommen, es gibt ein  $k \in \mathbb{N}_0$ , so dass gilt  $x(n) \in O(n^k)$ . Dann muss es ein  $c > 0$  und ein  $n_0 \in \mathbb{N}_0$  geben, so dass für alle  $n \geq n_0$  gilt:  $cn^k \geq x(n)$ .

Insbesondere gilt dann für alle geraden  $n \geq \max\{8, n_0\}$ :  $cn^k \geq 2^{\frac{n-6}{2}}$

Quadrieren auf beiden Seiten führt zu  $c^2 n^{2k} \geq 2^{n-6}$ .

Multiplikation von  $2^6$  auf beiden Seiten führt zu  $(2^6 c^2) n^{2k} \geq 2^n$ .

Wir wählen nun  $k_0 = 2k + 1$  und erhalten für gerade  $n \geq \max\{8, n_0, 2^6 c^2\}$ :

$$n^{k_0} = n^{2k} \cdot n \geq (2^6 c^2) n^{2k} \geq 2^n.$$

Insbesondere gilt für  $k_1 \geq k_0$ :  $n^{k_1} \geq n^{k_0} \geq 2^n$ , falls  $n \geq \max\{8, n_0, 2^6 c^2\}$  gilt und  $n$  gerade ist. Wir können ein  $k_1$  also auf jeden Fall so wählen, dass  $k_1 \geq 5$  gilt und  $n^{k_1} \geq 2^n$  für hinreichend große gerade  $n$  gilt.

Wir wählen  $d \geq 1$  nun so, dass  $n = 2^{dk_1} \geq \max\{8, n_0, 2^6 c^2\}$  gilt.

Dann gilt  $2^{dk_1 \cdot k_1} = n^{k_1} \geq 2^{2^{dk_1}}$

Zieht man auf beiden Seiten den Zweierlogarithmus, erhält man:

$$dk_1^2 \geq 2^d \cdot 2_1^k. \text{ (I)}$$

Wir zeigen durch vollständige Induktionen, dass für  $d \geq 1$  gilt:  $2^d > d$  und für  $k_1 \geq 5$  gilt:  $k_1^2 < 2k_1$ .

$$d < 2^d:$$

Induktionsanfang:  $d = 1$ :  $1 < 2^1 = 2$  stimmt.

Induktionsannahme: Für ein festes  $d \geq 1$  gilt  $d < 2^d$ .

Induktionsschritt:  $d \rightarrow d + 1$ :  $2^{d+1} = 2^d + 2^d > d + 2^d$  nach Induktionsvoraussetzung.

$$d + 2^d \geq d + 2 > d + 1 \text{ für } d \geq 1.$$

$$k_1^2 < 2^{k_1}:$$

Induktionsanfang:  $k_1 = 5$ :  $5^2 = 25 < 32 = 2^5$  stimmt.

Induktionsannahme: Für ein festes  $k_1 \geq 5$  gilt  $k_1^2 < 2^{k_1}$ .

Induktionsschritt:  $k_1 \rightarrow k_1 + 1$ :

$$2^{k_1+1} = 2^{k_1} + 2^{k_1} > k_1^2 + k_1^2 \text{ nach Induktionsvoraussetzung.}$$

$$k_1^2 + k_1^2 \geq k_1^2 + 5k_1 = k_1^2 + 4k_1 + k_1 \geq k_1^2 + 2k_1 + 1 = (k_1 + 1)^2.$$

$$\text{Somit gilt: } dk_1^2 < 2^d 2^{k_1}$$

Dies ist ein Widerspruch zu (I), und somit kann es kein  $k \in \mathbb{N}_0$  geben, für das gilt:  $x(n) \in O(n^k)$ .

## Aufgabe 27

a)  $L_1 = \{w \in \{a, b\}^*\} = \{a, b\}^*$ .  
 $L_2 = \{w \in \{a, b\}^*\} = \{a, b\}^*$ .

b)  $\forall n \in \mathbb{N}_0 : L_n = \{a, b\}^*$ .

## Aufgabe 28

Die konkatenierten Wörter im Folgenden liegen jeweils in  $L$ .

a)  $aaabbb \notin L^*$ .

b)  $bbaaa \notin L^*$ .

- c)  $aabaaaba = aaba \cdot aaba \in L^*$ .
- d)  $baaaaba = ba \cdot aaaba \in L^*$ .
- e)  $aababbbb \in L \subseteq L^*$ .
- f)  $abababab = abab \cdot abab = aba \cdot ba \cdot bab \in L^*$ .

### Aufgabe 29

- a)  $G = (\{S\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aSb \mid Sb \mid b\})$
- b)  $G = (\{S\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aS\})$

Hinweis: Wichtig ist, dass die Grammatik die leere Menge erzeugt; dies kann auf sehr viele unterschiedliche, beliebig komplizierte Arten gemacht werden!

- c)  $G = (\{S, S_1, S_2\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aSb \mid S_1 \mid S_2, \\ S_1 \rightarrow aS_1 \mid a, \\ S_2 \rightarrow S_2b \mid b\})$
- d)  $G = (\{S, S_1, S_2\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow S_1S_2, \\ S_1 \rightarrow aS_1b \mid S_1b \mid b, \\ S_2 \rightarrow aS_2b \mid aS \mid a\})$

### Aufgabe 30

- a)  $G = (\{S\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aS \mid bS \mid \epsilon\})$

Diese Grammatik erzeugt  $\{a, b\}^*$ , eine Menge, die für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  genau  $2^n$  Wörter der Länge  $n$  enthält.

- b)  $G = (\{S\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aS \mid \epsilon\})$

Diese Grammatik erzeugt  $\{a\}^*$ , eine Menge, die für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  genau 1 Wort der Länge  $n$  enthält, nämlich  $a^n$ .

- c)  $G = (\{S\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aS \mid Sb \mid a\})$

Diese Grammatik erzeugt  $\{a^n b^m \mid n \geq 1, m \in \mathbb{N}_0\}$ , eine Menge, die für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  genau  $n$  Wörter der Länge  $n$  enthält, nämlich die  $n$  Wörter der Form  $a^k b^{n-k}$  mit  $1 \leq k \leq n$ .

### Aufgabe 31

a)  $\preceq$  ist reflexiv: Sei  $w \in A^*$  beliebig. Dann gilt für  $u = v = \epsilon : u w v = w$ , und nach Definition folgt  $w \preceq w$ , womit Reflexivität gezeigt ist.

b)  $\preceq$  ist nicht symmetrisch: Sei  $x \in A$ . Dann gilt für  $u = v = x : u x v = x x x$  und damit  $x \preceq x x x$ . Wäre  $\preceq$  symmetrisch, müsste ebenfalls gelten  $x x x \preceq x$ .

Angenommen, es gäbe  $u', v' \in A^*$ , so dass  $u' x x x v' = x$  gilt. Betrachtet man die Längen der Wörter auf beiden seiten, erhält man:

$$|u'| + |v'| + 3 = |u' x x x v'| = |x| = 1$$

und damit  $|u'| + |v'| = -2$ , was nicht möglich ist.

Somit kann  $\preceq$  nicht symmetrisch sein.

c)  $\preceq$  ist antisymmetrisch: Wir betrachten  $w, w' \in A^*$  mit  $w \preceq w'$  und  $w' \preceq w$ .

Dann gibt es nach Definition  $u, u', v, v' \in A^*$  mit  $u w v = w'$  und  $u' w' v' = w$ .

Es folgt  $u' u w v v' = w$ . Wir betrachten wieder die Längen der Wörter auf beiden Seiten und erhalten  $|u'| + |u| + |w| + |v| + |v'| = |w|$  und damit  $|u| + |u'| + |v| + |v'| = 0$ , was bedeutet, dass  $u = u' = v = v' = \epsilon$  gelten muss.

Damit folgt  $w = \epsilon w \epsilon = w'$  was die Antisymmetrie beweist.

d)  $\preceq$  ist transitiv: Wir betrachten  $w_1, w_2, w_3 \in A^*$  mit  $w_1 \preceq w_2$  und  $w_2 \preceq w_3$ .

Dann gilt: Es gibt  $u, v, u', v' \in A^*$  mit  $u w_1 v = w_2$  und  $u' w_2 v' = w_3$ .

Es folgt  $u' u w_1 v v' = w_3$ , und damit gilt nach Definition auch  $w_1 \preceq w_3$ , da  $u' u, v v' \in A^*$  gilt.

### Aufgabe 32

Eine Codierung ist eine injektive Abbildung von einer formalen Sprache  $L_A$  in eine formale Sprache  $L_B$ .

Eine Codierung  $c : L_A \rightarrow L_B$  heißt präfixfrei, falls gilt:

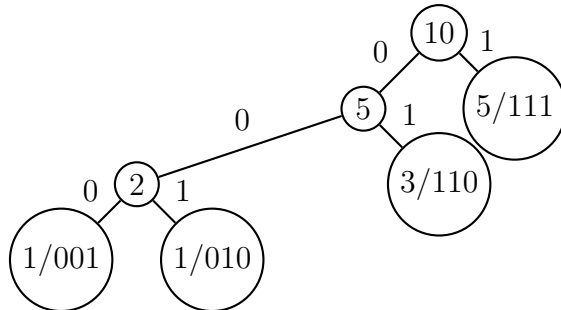
$\forall w_1, w_2 \in L_A : c(w_1) \text{ ist Präfix von } c(w_2) \iff w_1 = w_2$ .

### Aufgabe 33

a) Das Wort zerlegt in Dreierblöcke: 001 111 110 111 110 111 010 111 110 111

Die Häufigkeiten:

| 001 | 111 | 110 | 010 |
|-----|-----|-----|-----|
| 1   | 5   | 3   | 1   |



b)

c) Die Codierung lautet: 000 1 01 1 01 1 001 1 01 1

### Aufgabe 34

- a) Ein ungerichteter Baum, der genau  $n$  Kanten enthält, muss genau  $n + 1$  Knoten enthalten.
- b) Ein gerichteter Baum, der genau  $n$  Kanten enthält, muss genau  $n + 1$  Knoten enthalten.
- c) Wir betrachten einen gerichteten Baum  $G = (V, E)$  und bestimmen als erstes den Eingangsgrad eines Knotens  $v$ , der nicht die Wurzel  $r$  ist:

Da es einen Weg von  $r$  nach  $v$  gibt, muss  $v$  mindestens den Eingangsgrad 1 haben.

Angenommen, es gibt zwei verschiedene Knoten  $u, w$ , so dass es eine Kante von  $u$  nach  $v$  und eine Kante von  $w$  nach  $v$  gibt.

Nach Definition gibt es einen Weg von  $r$  nach  $u$  und einen Weg von  $r$  nach  $w$ , und damit mindestens zwei Wege von  $r$  nach  $v$ : Einen weg, der als letzten Knoten vor  $v$  den Knoten  $u$  enthält, und einen, der vor dem Knoten  $v$  den Knoten  $w$  enthält.

Dies ist ein Widerspruch zur Definition, also muss jeder Knoten  $v$  außer der Wurzel den Eingangsgrad 1 haben.

$$\text{Es gilt: } n = |E| = |\{(x, y) \mid (x, y) \in E\}| = \sum_{y \in V} |\{(x, y) \mid (x, y) \in E\}| = \sum_{y \in V} |\{x \mid (x, y) \in E\}| = \sum_{y \in V} \text{indeg}(y) = 0 + \sum_{y \in V \setminus \{r\}} 1 = |V \setminus \{r\}|$$

Somit folgt  $n = |V| - 1$  und damit  $|V| = n + 1$ .

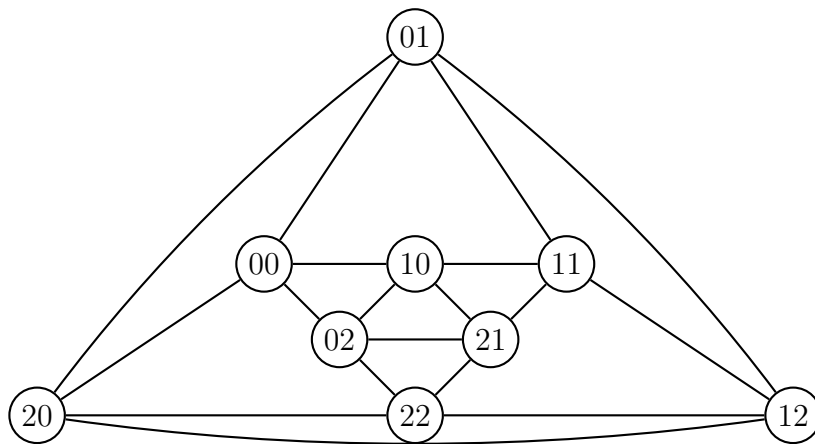
Angenommen, es gäbe einen ungerichteten Baum mit genau  $n$  Kanten und  $m \neq n + 1$  Knoten. Indem man einen Knoten als Wurzel wählt, könnte man dann einen gerichteten Baum mit  $n$  Kanten und  $m$  Knoten konstruieren. Dies ist jedoch, wie oben gezeigt, nicht möglich.

Also muss die Aussage auch für ungerichtete Bäume stimmen.

### Aufgabe 35

Wir betrachten den (überschaubareren) Graphen  $G' = (V, E)$  mit  $V = \{0, 1, 2\}^2$  und  $E = \{\{xy, yz\} \mid x, y, z \in \{0, 1, 2\} \text{ und } x \neq y\}$ .

(Der in der Aufgabe angegebene Graph würde den Rahmen einer Klausuraufgabe bei weitem sprengen!)



a)

b) Ein solcher Weg ist (00, 02, 22, 21, 11, 10, 02, 21, 10, 00, 01, 11, 12, 22, 20, 01, 12, 20, 00)

c)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 36

- a)  $E$  ist eine Teilmenge von  $V \times V$ , kurz:  $E \subseteq V \times V$ .
- b) Falls der Eintrag in Zeile  $i$  Spalte  $j$  1 ist, liegt  $(i, j)$  in  $E$ ; ist der Eintrag 0, liegt  $(i, j)$  nicht in  $E$ .  
Weitere Fälle gibt es nach Definition der Adjazenzmatrix nicht.
- c) Wenn  $G$  schlingenfrei ist, befinden sich auf der Diagonalen von  $A$  nur Nullen.
- d) Es gibt  $2^{n^2-n}$  verschiedene schlingenfreie Graphen mit der Knotenmenge  $V$ :  
Jede Matrix über  $\{0, 1\}$ , die nur Nullen auf der Diagonalen enthält, ist Adjazenzmatrix eines Graphen. Man hat also  $n^2 - n$  Einträge, für die man jeweils einen Eintrag aus  $\{0, 1\}$  wählen kann ( $n \cdot n$  Einträge, von denen  $n$  auf der Diagonalen liegen), was zur angegebenen Anzahl führt.
- e) Die Wegematrix eines Graphen  $G$  enthält eine 1 in Zeile  $i$  Spalte  $j$ , falls es einen Weg von  $i$  nach  $j$  in  $G$  gibt, und eine 0 sonst.
- f) Wenn  $G$  streng zusammenhängend ist, besteht die Wegematrix von  $G$  nur aus Einsen.

### Aufgabe 37

- a) Für alle  $c \geq 4$ .
- b) Für alle  $c > 1$ .
- c) Für alle  $c \geq 2$ .

### Aufgabe 38

- a)  $R \circ R = R$
- b) Wir zeigen, dass  $R$  in  $R \circ R$  enthalten ist:  
Sei  $(x, y) \in R$ . Da  $R$  eine Äquivalenzrelation ist, gilt auch  $(y, y) \in R$ . Somit gilt für  $z = y$ :  $(x, z) \in R \wedge (z, y) \in R$ .  
Nach Definition von  $R \circ R$  gilt somit auch  $(x, y) \in R \circ R$ .



Nun zeigen wir, dass  $R \circ R$  in  $R$  liegt:

Sei  $(x, y) \in R \circ R$ . Dann gibt es nach Definition ein  $z \in M$ , so dass gilt:  
 $(x, z) \in R \wedge (z, y) \in R$ .

Da  $R$  als Äquivalenzrelation transitiv ist, folgt  $(x, y) \in R$ .

Damit gilt  $R \subseteq R \circ R$  und  $R \circ R \subseteq R \Rightarrow R = R \circ R$ .

c)  $R^* = R$ .

d) Es gilt  $R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$

Wir zeigen per Induktion über  $i$  dass für  $i \geq 1$  gilt:  $R^i = R$ .

Induktionsanfang:  $i = 1$ :  $R^1 = R$  stimmt.

Induktionsannahme: Für ein festes  $i \in \mathbb{N}^+$  gelte  $R^i = R$ .

Induktionsschritt: Wir berechnen  $R^{i+1}$ :

$R^{i+1} = R^i \circ R = R \circ R$  nach Induktionsvoraussetzung.

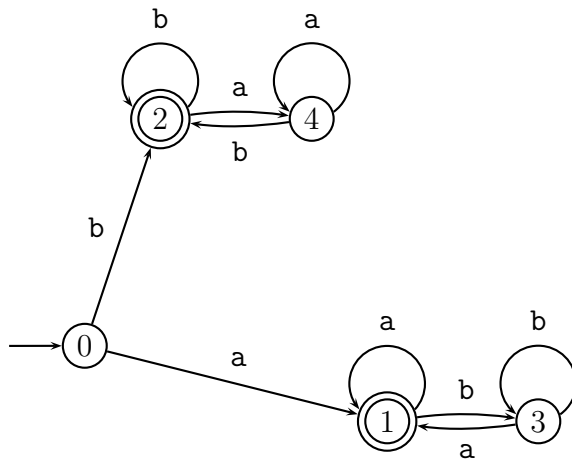
Andererseits gilt  $R \circ R = R$  nach Teilaufgabe a).

Somit folgt  $R^{i+1} = R$ , wie zu zeigen war.

Da  $R$  eine Äquivalenzrelation und damit reflexiv ist, muss  $R^0 = \{(x, x) \mid x \in M\} \subseteq R$  gelten.

Es folgt:  $R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i = R^0 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R^0 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} R = R^0 \cup R = R$ , da  $R^0 \subseteq R$  gilt.

## Aufgabe 39



### Aufgabe 40

$A = (Z_1 \times Z_2, (z_01, z_02), X, f, F_1 \times F_2)$  mit  
 $f : (Z_1 \times Z_2) \times X \rightarrow Z_1 \times Z_2$   
 $((z_1, z_2), x) \mapsto (f_1(z_1, x), f_2(z_2, x)).$

Idee: Die beiden Automaten laufen parallel nebeneinander her; ein Wort wird genau dann akzeptiert, wenn beide Automaten in einem akzeptierenden Endzustand aufhören.

### Aufgabe 41

1.  $(a \mid b)(aa \mid ab \mid ba \mid bb)^*$  oder  $(a \mid b)((a \mid b)(a \mid b))^*$
2.  $(a((a \mid b)(a \mid b))^*b) \mid (b((a \mid b)(a \mid b))^*a)$
3.  $(a \mid b)^*ba(a \mid b)^*$
4.  $(b^*aa^*bb^*) \mid (b^* \mid b^*aa^* \mid b^*aa^*b)$

### Aufgabe 42

a)  $\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{b}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{a}$

b)  $\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{b}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{a}$   
 $\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{b}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{a}$   
 $\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{b}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{a}$   
 $\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{b}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{a}$

c)  $\bar{a}\bar{a}\bar{b}\bar{m}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{a}$

d)  $\bar{a}\bar{a}\bar{b}\bar{a}$  (Hinweis: Kurzzeitig stand fälschlicherweise  $\bar{a}\bar{a}\bar{b}\bar{a}$  in der Aufgabenstellung.)

e)  $w_1\bar{m}w_2$