Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
31. August 2009

Klausur-nummer

Name:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	4	4	8	8	6	8	8
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:	Note:

Aufgabe 1 (1+1+2 = 4 Punkte)
In dieser Aufgabe geht um die formalen Sprachen

$$L_1 = \{\mathtt{a}^k\mathtt{b}^m \mid k, m \in \mathbb{N}_0 \land k \bmod 2 = 0 \land m \bmod 3 = 1\}$$
$$L_2 = \{\mathtt{b}^k\mathtt{a}^m \mid k, m \in \mathbb{N}_0 \land k \bmod 2 = 1 \land m \bmod 3 = 0\}$$

Geben Sie für jede der folgenden formalen Sprachen L je einen regulären Ausdruck R_L an mit $\langle R_L \rangle = L$.

a) $L = L_1$

b) $L = L_1 \cdot L_2$

c) $L = L_1 \cap L_2$

Aufgabe 2 (1+1+1+1 = 4 Punkte)
In dieser Aufgabe geht es um Abbildungen.

a) Wie viele Abbildungen gibt es von einer einelementigen Menge in eine n-elementige Menge?

b) Wie viele Abbildungen gibt es von einer n-elementigen Menge in eine einelementige Menge?

c) Wie viele injektive Abbildungen gibt es von einer n-elementigen Menge in eine einelementige Menge?

d) Wie viele injektive Abbildungen gibt es von einer 2-elementigen Menge in eine 3-elementige Menge?

Aufgabe 3 (3+2+3 = 8 Punkte)
Gegeben sei eine nichtleere Menge M mit einer Halbordnung $\sqsubseteq$ darauf. Eine Folge $(a_1, \ldots, a_n)$ in M heiße *streng monoton fallend*, falls gilt:

$\forall i \in \{1, \ldots, k-1\} : a_{i+1} \sqsubseteq a_i \land a_{i+1} \neq a_i$.

a) Sei $(a_1, \ldots, a_n)$ eine streng monoton fallende Folge in M. Zeigen Sie, dass gilt:

   $\forall i \in \{1, \ldots, n\} \forall j \in \{1, \ldots, n\} : i < j \Rightarrow a_j \sqsubseteq a_i$.

   Führen Sie dazu eine vollständige Induktion über die Differenz $k = i - j$ durch!

b) Sei $(a_1, \ldots, a_n)$ eine streng monoton fallende Folge in M. Zeigen Sie, dass gilt:

   $\forall i \in \{1, \ldots, n\} \forall j \in \{1, \ldots, n\} : i < j \Rightarrow a_i \neq a_j$.

   Hinweis: Betrachten Sie das Element a_{i+1} und verwenden Sie Teilaufgabe a).

c) Zeigen Sie durch vollständige Induktion über n:

   $\forall n \in \mathbb{N}^+$: Falls M kein minimales Element enthält, gibt es eine streng monoton fallende Folge $(a_1, \ldots, a_n)$ mit n Elementen in M.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 3:

Aufgabe 4 (3+2+3 = 8 Punkte)
In dieser Aufgabe geht es um endliche Akzeptoren mit Zustandsmenge $Z = \{z_0, z_1, z_2\}$ und Eingabealphabet $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.

a) Kann die durch den formalen Ausdruck $(\mathtt{aaaa})*$ beschriebene Sprache von einem Automaten mit der oben genannten Zustandsmenge Z und dem oben genannten Eingabealphabet X erkannt werden?

   Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Geben Sie einen endlichen Akzeptor mit der oben genannten Zustandsmenge Z und dem oben genannten Eingabealphabet X an, der genau die Wörter $w \in X^*$ akzeptiert, für die gilt:

   Die Anzahl der a in dem Wort w ist gerade und größer als 1.

c) Geben Sie einen endlichen Akzeptor mit der oben genannten Zustandsmenge Z und dem oben genannten Eingabealphabet X an, der genau die Wörter $w \in X^*$ akzeptiert, die die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

   - w beginnt mit a oder ist das leere Wort.
   - In w kommt nirgends das Teilwort aa vor.
   - In w kommt nirgends das Teilwort bb vor.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 4:

Aufgabe 5 (2+2+2 = 6 Punkte)

Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (\{S, X\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S, \{S \to \mathtt{a}S\mathtt{a} \mid \mathtt{b}S\mathtt{b} \mid \mathtt{a}X\mathtt{b} \mid \mathtt{b}X\mathtt{a}, X \to \mathtt{a}X \mid \mathtt{b}X \mid \varepsilon\}$

a) Geben Sie ein Wort der Länge 5 an, das in $L(G)$ liegt, und ein Wort der Länge 5, das nicht in $L(G)$ liegt.

b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G' = (N, T, S', P)$ an, für die gilt:

   $L(G') = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \setminus L(G)$

c) Geben Sie eine Abbildung $g : \mathbb{N}_0 \to \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ an, so dass gilt:

   $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall m \in \mathbb{N}_0 : g(n)\mathtt{a}^m \in L(G) \iff n \neq m$

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 5:

Aufgabe 6 (4+2+2 = 8 Punkte)
Sei $\mathcal{G}$ die Menge aller gerichteten Graphen, für die gilt: Jeder Knoten hat den Ausgangsgrad 1 und es gibt einen Knoten, von dem aus alle anderen Knoten über einen Weg erreichbar sind.

a) Zeichnen Sie alle Graphen aus $\mathcal{G}$ mit vier Knoten, von denen keine zwei Graphen isomorph sind.

b) Geben Sie für die Hälfte der dargestellten Graphen die Adjazenzmatrix an. Machen Sie deutlich, welche Adjazenzmatrix zu welchem Graphen gehört.

c) Geben Sie für jeden dargestellten Graphen, für den Sie keine Adjazenzmatrix angegeben haben, die Wegematrix an. Machen Sie deutlich, welche Wegematrix zu welchem Graphen gehört.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 6:

Aufgabe 7 (2+1+1+2+1+1 = 8 Punkte)
Gegeben sei die folgende Turingmaschine T:

- Zustandsmenge ist $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_e, z_a, z_b, z'_a, z'_b, f_1, f_2\}$.
- Anfangszustand ist z_0.
- Bandalphabet ist $X = \{\square, \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{\#}\}$.
- Die Arbeitsweise ist wie folgt festgelegt:

	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
a	$(z_0, \mathtt{a}, 1)$	$(z_1, \mathtt{a}, 1)$	$(z_2, \mathtt{a}, 1)$	$(z_3, \mathtt{a}, -1)$	$(z_a, \square, 1)$
b	$(z_0, \mathtt{b}, 1)$	$(z_1, \mathtt{b}, 1)$	$(z_2, \mathtt{b}, 1)$	$(z_3, \mathtt{b}, -1)$	$(z_b, \square, 1)$
#	$(z_1, \mathtt{\#}, 1)$	$(z_2, \mathtt{\#}, 1)$	$(z_2, \mathtt{\#}, 1)$	$(z_3, \mathtt{\#}, -1)$	$(z_e, \square, 1)$
$\square$	$(s_2, \square, 1)$	$(z_3, \square, -1)$	$(z_2, \square, 1)$	$(z_4, \square, 1)$	$(z_2, \square, 1)$

	z_a	z_b	z'_a	z'_b	z_e
a	$(z_a, \mathtt{a}, 1)$	$(z_b, \mathtt{a}, 1)$	$(z_3, \mathtt{\#}, -1)$	$(f_1, \mathtt{a}, 0)$	$(f_1, \mathtt{a}, 0)$
b	$(z_a, \mathtt{b}, 1)$	$(z_b, \mathtt{b}, 1)$	$(f_1, \mathtt{b}, 0)$	$(z_3, \mathtt{\#}, -1)$	$(f_1, \mathtt{b}, 0)$
#	$(z'_a, \mathtt{\#}, 1)$	$(z'_b, \mathtt{\#}, 1)$	$(z'_a, \mathtt{\#}, 1)$	$(z'_b, \mathtt{\#}, 1)$	$(z_e, \square, 1)$
$\square$	$(z_2, \square, 1)$	$(z_2, \square, 1)$	$(f_1, \square, 0)$	$(f_1, \square, 0)$	$(f_2, \square, 0)$

Die Turingmaschine wird im folgenden benutzt für Bandbeschriftungen, bei denen auf dem Band (von Blanksymbolen umgeben) ein Wort $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{\#}\}^*$ steht.

Der Kopf der Turingmaschine stehe auf dem ersten Symbol von $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\,\mathtt{\#}\}^*$.

Sei $\mathcal{L}$ die Menge aller Wörter $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{\#}\}^*$, für die gilt: T hält bei Eingabe von w im Zustand f_2.

a) Geben Sie einen regulären Ausdruck für die Menge aller Wörter w an, für die T bei Eingabe von w irgendwann hält.

b) Berechnen Sie die Endkonfiguration für die Eingabe $w = \mathtt{aaab\#baa}$.

c) Berechnen Sie die Endkonfiguration für die Eingabe $w = \mathtt{abbaa\#abba}$.

d) Geben Sie eine formale Beschreibung von $\mathcal{L}$ an, die nicht auf T verweist.

e) Sei $w \in \mathcal{L}$ die Eingabe von T. Welches Wort w' steht auf dem Band, wenn sich T im Zustand f_2 befindet?

f) Geben Sie eine möglichst einfache Funktion g an, so dass gilt:

Es gibt eine Funktion $f \in \Theta(g)$, so dass T bei Eingabe eines Wortes $w \in \mathcal{L}$ der Länge n genau $f(n)$ Schritte macht, bis T hält.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 7: