Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1.1 (2+1+4 Punkte)

Es sei V die Vorlesung „Grundbegriffe der Informatik“, T die Menge aller Tutorien zu V und H die Menge aller Personen, die V hören.
Die Relation $Z \subseteq T \times H$ sei definiert durch:
$\forall t \in T : \forall h \in H : (t, h) \in Z \iff h$ wurde t zugeteilt.

a) Welche der Eigenschaften linkstotal, linkseindeutig, rechtstotal, rechtseindeutig sollte Z *idealerweise* haben/nicht haben?

b) Welche Eigenschaften wird Z mit Sicherheit nicht haben?

c) Erklären Sie jeweils, was es bedeutet, wenn Z linkstotal, linkseindeutig, rechtstotal, rechtseindeutig ist.

Lösung 1.1

a) Die Relation sollte rechtstotal, linkstotal und linkseindeutig sein. Rechtseindeutigkeit ist (vermutlich?) ideal, aber total unrealistisch. (Erklärungen siehe unten)

b) Rechtseindeutigkeit

c)
- linkstotal: in jedem Tutorien ist mindestens ein Student
- rechtstotal: jeder Student ist mindestens einem Tutorium zugeteilt
- linkseindeutig: jeder Studenten ist höchstens (!) einem Tutorium zugeteilt
- rechtseindeutig: in jedem Tutorium ist höchstens (!) ein Student

Aufgabe 1.2 (1+2+2+2 Punkte)

Spieler A und Spieler B spielen folgendes „Spiel“:
Eine Münze wird geworfen. Wenn die Oberseite „Kopf“ zeigt, gewinnt Spieler A.
Wenn die Oberseite „Zahl“ zeigt, verliert Spieler B.
Die Münze lande **niemals** auf dem Rand!

a) Geben Sie eine aussagenlogische Formel an, die das Verhältnis der Aussage $\mathcal{A}$: „Spieler A gewinnt“ zu der Aussage $\mathcal{B}$: „Spieler B verliert“ beschreibt.

b) Geben Sie eine aussagenlogische Formel an, welche die Spielregel möglichst präzise beschreibt. Verwenden Sie hierzu auch die Aussagen $\mathcal{K}$: „Die Münze zeigt Kopf“ und $\mathcal{Z}$:„Die Münze zeigt Zahl“.

c) Spieler B behauptet, dass er bei dieser Spielregel immer verlieren würde. Geben Sie eine aussagenlogische Formel an, die dieser Behauptung entspricht. Verwenden Sie dazu Ihre Formeln aus den Teilaufgaben a) und b).

d) Zeigen Sie durch eine Wahrheitstabelle, dass B mit seiner Behauptung Recht hat.

Lösung 1.2

a) $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$
Erläuterung: Die beiden Aussagen sind äquivalent, das heißt, dass Spieler A genau dann gewinnt, wenn Spieler B verliert.

b) $(\mathcal{K} \Rightarrow \mathcal{A}) \wedge (\mathcal{Z} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{K} \vee \mathcal{Z})$
Erläuterung: Die Spielregel an sich lässt sich durch die Formel $(\mathcal{K} \Rightarrow \mathcal{A}) \wedge (\mathcal{Z} \Rightarrow \mathcal{B})$ darstellen.

Weiterhin ist festzuhalten, dass eine der Aussagen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{Z}$ immer gilt: $\mathcal{K} \vee \mathcal{Z}$

(Noch präziser wäre die Feststellung, dass *genau* eine dieser Aussagen immer gilt: $(\mathcal{K} \wedge \neg\mathcal{Z}) \vee (\mathcal{Z} \wedge \neg\mathcal{K})$ Das stand jedoch nicht explizit in der Aufgabenstellung.)

c) $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}) \wedge (\mathcal{K} \vee \mathcal{Z}) \wedge (\mathcal{K} \Rightarrow \mathcal{A}) \wedge (\mathcal{Z} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B}$

d) *Erläuterung:* Wir schreiben im folgenden “w” für “wahr” und “f” für “falsch”.

Als erstes die Wahrheitstabellen für die fünf Implikationen:

$\mathcal{K}$	$\mathcal{Z}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{F}_1$ $(\mathcal{K} \Rightarrow \mathcal{A})$	$\mathcal{F}_2$ $(\mathcal{Z} \Rightarrow \mathcal{B})$	$\mathcal{F}_3$ $(\mathcal{K} \vee \mathcal{Z})$	$\mathcal{F}_4$ $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$	$\mathcal{F}_5$ $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$
f	f	f	f	w	w	f	w	w
f	f	f	w	w	w	f	w	f
f	f	w	f	w	w	f	f	w
f	f	w	w	w	w	f	w	w
f	w	f	f	w	f	w	w	w
f	w	f	w	w	w	w	w	f
f	w	w	f	w	f	w	f	w
f	w	w	w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	f	w	w	w	w
w	f	f	w	f	w	w	w	f
w	f	w	f	w	w	w	f	w
w	f	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	f	f	w	w	w
w	w	f	w	f	w	w	w	f
w	w	w	f	w	f	w	f	w
w	w	w	w	w	w	w	w	w

Wir werten nun erst $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2 \wedge \mathcal{F}_3 \wedge \mathcal{F}_4 \wedge \mathcal{F}_5$ aus und dann die Implikation $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{B}$:

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{B}$
w	w	f	w	w	f	f	w
w	w	f	w	f	w	f	w
w	w	f	f	w	f	f	w
w	w	f	w	w	w	f	w
w	f	w	w	w	f	f	w
w	w	w	w	f	w	f	w
w	f	w	f	w	f	f	w
w	w	w	w	w	w	w	w
f	w	w	w	w	f	f	w
f	w	w	w	f	w	f	w
w	w	w	f	w	f	f	w
w	w	w	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	f	f	w
f	w	w	w	f	w	f	w
w	f	w	f	w	f	f	w
w	w	w	w	w	w	w	w

Da die letzte Implikation immer den Wert "wahr" hat, folgt, dass die von Spieler B aufgestellte Behauptung korrekt ist.

Aufgabe 1.3 (6 Punkte)
Geben Sie alle surjektiven Funktionen von $\{0, 1, 2\}$ nach $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ an.
(Mit anderen Worten: Geben Sie für jede surjektive Funktion $f : \{0, 1, 2\} \to \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ die Werte $f(0), f(1)$ und $f(2)$ an, oder interpretieren Sie jede dieser Funktionen als ein Wort über $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.)

Lösung 1.3

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$
0	`a`	`a`	`a`	`b`	`b`	`b`
1	`a`	`b`	`b`	`a`	`a`	`b`
2	`b`	`a`	`b`	`a`	`b`	`a`

Als Wörter also: `aab`, `aba`, `abb`, `baa`, `bab`, `bba`.