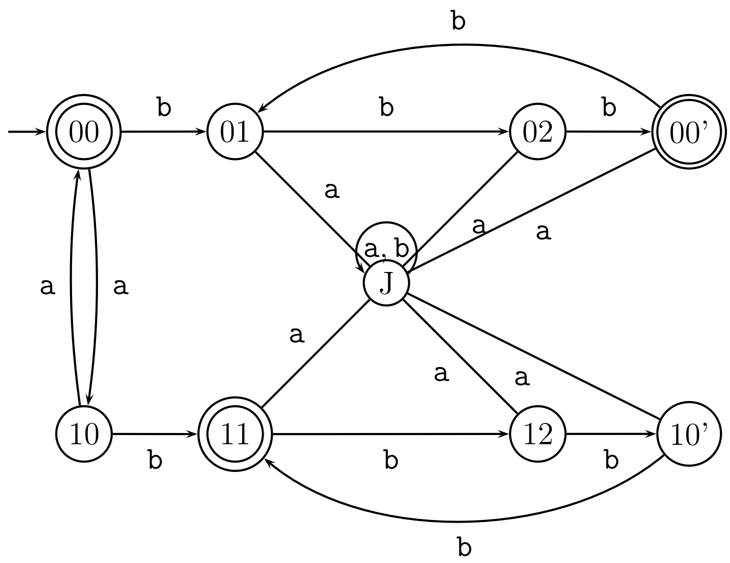
Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 10

Aufgabe 10.1 (3+3+1 Punkte)

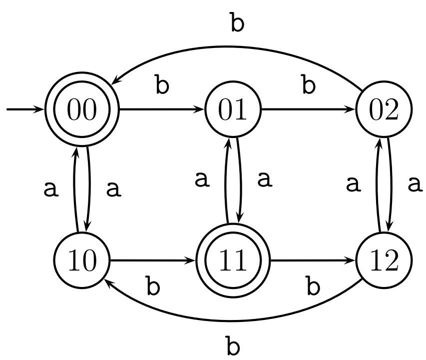
a) Geben Sie einen endlichen Akzeptor $A = (Z, z_0, X, f, F)$ an, für den gilt:
$L(A) = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^m \mid n \mod 2 = m \mod 3\}$.

Idee: In die Zustände wird die Anzahl der `a` mod 2 sowie die Anzahl der `b` mod 3 gespeichert. Weiter wird darauf geachtet, dass nach einem `b` kein `a` kommen darf.

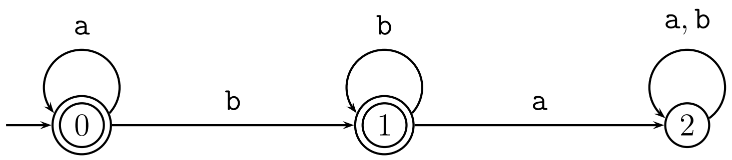


Hinweis: Die Paare $00'$ und 11, 01 und 12 sowie $10'$ und 02 kann man auch jeweils zu einem einzigen Zustand zusammenfassen.

b) Geben Sie einen endlichen Akzeptor $A = (Z, z_0, X, f, F)$ an, für den gilt:
$L(A) = \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid N_{\mathtt{a}}(w) \mod 2 = N_{\mathtt{b}}(w) \mod 3\}$.



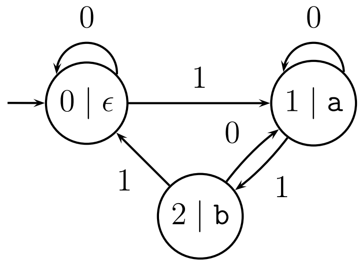
c) Geben Sie für den folgenden Akzeptor A die Sprache $L(A)$ an:



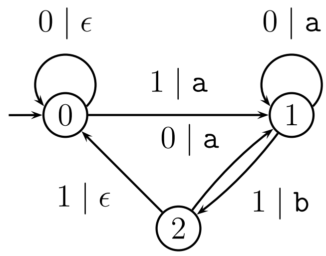
Die Sprache ist $\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}^* = \langle \mathtt{a} * \mathtt{b} * \rangle = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0\}$.

Aufgabe 10.2 (2+2+3 Punkte)
Gegeben sei folgender Moore-Automat $M = (Z, z_0, X, f, Y, g)$: $Z = \{0, 1, 2\}, z_0 = 0, X = \{0, 1\}, Y = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$
$\forall x \in X : f(0, x) = x, f(1, x) = 1 + x, f(2, x) = 1 - x$
$g(0) = \epsilon, g(1) = \mathtt{a}, g(2) = \mathtt{b}$.

a) Stellen Sie M graphisch dar.



b) Geben Sie einen Mealy-Autmaten $M' = (Z', z_0', X, f', Y', \bar{g})$ an, so dass gilt:
$\forall w \in X^* : g^{**}(0, w) = \bar{g}^{**}(z_0', w)$.



c) Beweisen Sie, dass für Ihren Mealy-Automaten M' gilt:
$\forall w \in X^* : g^{**}(0, w) = \bar{g}^{**}(z_0', w)$.

Es gilt für $M' = (Z', z_0', X, f', Y', \bar{g})$:
$Z' = Z, z_0' = 0, f' = f$ und $\forall z \in Z \forall x \in X : \bar{g}(z, x) = g(f(z, x))$.
Wir zeigen $\forall w \in X^* : g^{**}(0, w) = \bar{g}^{**}(0, w)$ durch Induktion:
Induktionsanfang: $w = \epsilon$: $g^{**}(0, \epsilon) = \epsilon = \bar{g}^{**}(0, \epsilon)$ ✓
Induktionsvoraussetzung: Für ein festes, aber beliebiges $w \in X^*$ gilt $g^{**}(0, w) = \bar{g}^{**}(0, w)$.
Induktionsschluss: Sei $x \in X$ beliebig. Wir zeigen:
$g^{**}(0, wx) = \bar{g}^{**}(0, wx)$.

$\bar{g}^{**}(0, wx) = \bar{g}^{**}(0, w)\bar{g}(f^*(0, w), x)$
$\stackrel{IV}{=} g^{**}(0, w)\bar{g}(f^*(0, w), x) \stackrel{Def}{=} g^{**}(0, w)g(f(f^*(0, w), x)) = g^{**}(0, w)g(f^*(0, wx)) =$
$g^{**}(0, wx)$,
wie zu zeigen war.
Damit ist die Behauptung gezeigt.

Aufgabe 10.3 (2+3+2 Punkte)

Gegeben seien zwei Mealy-Automaten $M_1 = (Z_1, z_{01}, X, f_1, Y_1, g_1)$ und
$M_2 = (Z_2, z_{02}, X, f_2, Y_2, g_2)$ mit $\forall i \in \mathbb{G}_2 \forall z \in Z_i \forall x \in X : |g_i(z, x)| = 1$.
Der Endliche Akzeptor $A = (Z, z_0, X, f, F)$ sei definiert durch:
$Z = (Z_1 \times Z_2) \cup \{J\}, z_0 = (z_{01}, z_{02}), F = Z_1 \times Z_2$
$\forall (z_1, z_2) \in Z_1 \times Z_2 \forall x \in X : f((z_1, z_2), x) = \begin{cases} (f_1(z_1, x), f_2(z_2, x)) & \text{falls } g_1(z_1, x) = g_2(z_2, x) \\ J & \text{sonst.} \end{cases}$
$\forall x \in X : f(J, x) = J$.

a) Was ist $f^*((z_{01}, z_{02}), w)$, wenn $w \in L(A)$ gilt?

   Für $w \in L(A)$ gilt $f^*((z_{01}, z_{02}), w) = (f_1^*(z_{01}, w), f_2^*(z_{02}, w))$.

b) Beweisen Sie, dass Ihre Behauptung aus Teilaufgabe a) für alle $w \in L(A)$ gilt.

   Induktionsanfang: $w = \epsilon$: $f^*((z_{01}, z_{02}), \epsilon) = (z_{01}, z_{02}) = (f_1^*(z_{01}, \epsilon), f_2^*(z_{02}, \epsilon))$.
   ✓
   Induktionsvoraussetzung: Für ein festes, aber beliebiges $w \in X^*$ gilt: $f^*((z_{01}, z_{02}), w) =$
   $(f_1^*(z_{01}, w), f_2^*(z_{02}, w))$ oder $w \notin L(A)$.
   Induktionsschluss: Sei $x \in X$ beliebig. Wir zeigen:
   $f^*((z_{01}, z_{02}), wx) = (f_1^*(z_{01}, wx), f_2^*(z_{02}, wx))$ oder $wx \notin L(A)$.
   Falls $w \notin L(A)$ gilt, folgt $f^*((z_{01}, z_{02}), w) = J$ und damit $f^*((z_{01}, z_{02}), wx) =$
   $f(f^*((z_{01}, z_{02}), w), x) = f(J, x) = J$, und es folgt $wx \notin L(A)$.
   Falls $w \in L(A)$ gilt, folgt nach Induktionsvoraussetzung $f^*((z_{01}, z_{02}), w) = (f_1^*(z_{01}, w), f_2^*(z_{02}, w))$,
   und damit $f^*((z_{01}, z_{02}), wx) = f(f^*((z_{01}, z_{02}), w), x) = f((f_1^*(z_{01}, w), f_2^*(z_{02}, w)), x)$
   $= \begin{cases} (f_1(f_1^*(z_{01}, w), x), f_2(f_2^*(z_{02}, w), x)) & \text{falls } g_1(f^*(z_{01}, w), x) = g_2(f^*(z_{02}, w), x) \\ J & \text{sonst.} \end{cases}$
   $= \begin{cases} (f_1^*(z_{01}, wx), f_2 * (z_{02}, wx)) & \text{falls } g_1(f^*(z_{01}, w), x) = g_2(f^*(z_{02}, w), x) \\ J & \text{sonst.} \end{cases}.$
   Falls also $wx \in L(A)$ gilt, und somit $f^*((z_{01}, z_{02}), wx) \neq J$ gilt, folgt $f^*((z_{01}, z_{02}), wx) =$
   $(f_1^*(z_{01}, wx), f_2 * (z_{02}, wx))$, wie zu zeigen war.
   Damit ist die Behauptung bewiesen.

c) Geben Sie eine mathematische Beschreibung von $L(A)$ an.

   $L(A) = \{w \in X^* \mid g_1^{**}(z_{01}, w) = g_2^{**}(z_{02}, w)\}$