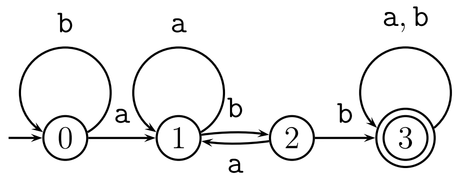
Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 11

Aufgabe 11.1 (3+4 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Sprachen $L_{1,2}$ jeweils einen Endlichen Akzeptor $A_{1,2}$, einen Regulären Ausdruck $R_{1,2}$ und eine Rechtslineare Grammatik $G_{1,2}$ an, so dass für $i \in \{1, 2\}$ gilt: $L(A_i) = \langle R_i \rangle = L(G_i) = L_i$.

a) $L_1 = \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } \mathtt{abb}\}$.

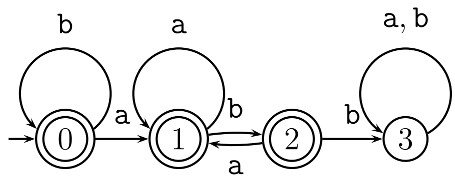
Endlicher Automat:



Regulärer Ausdruck: $R = (\mathtt{a} \mid \mathtt{b}) * \mathtt{abb}(\mathtt{a} \mid \mathtt{b})*$
Rechtslineare Grammatik:
$G = (\{X, Y\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, X, \{X \to \mathtt{a}X \mid \mathtt{b}X \mid \mathtt{abb}Y, Y \to \mathtt{a}Y \mid \mathtt{b}Y \mid \epsilon\})$

b) $L_2 = \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid w \notin L_1\}$.

Endlicher Automat:



Regulärer Ausdruck: $\mathtt{b}* \mid \mathtt{b} * \mathtt{a}(\mathtt{a} \mid (\mathtt{ba})) * (\mathtt{b} \mid \emptyset*)$
Rechtslineare Grammatik:
$G = (\{S, X\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S, \{S \to \mathtt{b}S \mid \epsilon \mid \mathtt{a}X, X \to \mathtt{a}X \mid \mathtt{ba}X \mid \mathtt{b} \mid \epsilon\})$

Aufgabe 11.2 (2 Punkte)

Geben Sie einen Regulären Ausdruck R an, so dass gilt:
$\langle R \rangle = \{w \in \{0, 1\}^* \mid Num_2(w) \text{ ist durch 3 teilbar}\}$.
Hinweis: Überlegen Sie sich, wie der Endliche Akzeptor aussieht, der $\langle R \rangle$ erkennt.

$R = (0 \mid 1(01*0)*1)*$

Aufgabe 11.3 (1+1+2+1+1 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es um reguläre Ausdrücke über dem Alphabet $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.

a) Wie viele Regex-Bäume gibt es, die die Höhe 0 haben?

3 ($\mathtt{a}, \mathtt{b}$ und $\emptyset$)

b) Wie viele Regex-Bäume gibt es, die die Höhe 1 haben?

Die Wurzel kann $*$ sein; dann gibt es für den einen Knoten, der an der Wurzel hängt, 3 Möglichkeiten.
Die Wurzel kann $\mid$ sein; dann gibt es für die beiden Knoten, die an der Wurzel hängt, jeweils 3 Möglichkeiten, also insgesamt 9.
Die Wurzel kann $\cdot$ sein; dann gibt es für die beiden Knoten, die an der Wurzel hängt, jeweils 3 Möglichkeiten, also insgesamt 9.
Man erhält also 21 verschiedene Regex-Bäume der Höhe 1.

c) Wie viele Regex-Bäume gibt es, die die Höhe 2 haben?

Die Wurzel kann $*$ sein; dann gibt es für den Baum der Höhe 1, der an der Wurzel hängt, 21 Möglichkeiten.
Die Wurzel kann $\mid$ sein. Falls beide an der Wurzel hängenden Teilbäume die Höhe 1 haben, gibt es für beide Teilbäume jeweils 21 Möglichkeiten, also insgesamt 441.
Falls der linke Teilbaum die Höhe 0 hat, gibt es für den linken Baum 3 Möglichkeiten und für den rechten Baum 21, also insgesamt 63.
Gleiches gilt, wenn der rechte Teilbaum die Höhe 0 hat und der linke Teilbaum die Höhe 1.
Für die Wurzel $\mid$ ergeben sich somit 567 Möglichkeiten.
Analog ergeben sich 567 Möglichkeiten, falls die Wurzel $\cdot$ ist.
Insgesamt ergeben sich also $2 \cdot 567 + 21 = 1155$ Regex-Bäume der Höhe 2.

d) Was ist die geringste Anzahl an Knoten, die ein Regex-Baum der Höhe n besitzen kann?

$n + 1$, wenn alle Knoten außer dem einzigen Blatt $*$ sind.

e) Was ist die höchste Anzahl an Knoten, die ein Regex-Baum der Höhe n besitzen kann?

$\sum_{i=0}^{n} 2^n = 2^{n+1} - 1$, falls alle Knoten außer den Blättern $\mid$ oder $\cdot$ sind.

Aufgabe 11.4 (2+2 Punkte)

Gegeben sei ein Mealy-Automat $A_1 = (Z_1, z_1, X, f_1, Y, g)$ und ein Endlicher Akzeptor $A_2 = (Z_2, z_2, X, f_2, F)$.

a) Geben Sie eine rechtslineare Grammatik $G_1 = (N_1, T_1, S_1, P_1)$ an, so dass gilt: $L(G_1) = \{g^{**}(z_1, w) \mid w \in X^*\}$.
(Hinweis: Wählen Sie $N = Z_1$ und $S = z_1$.)

$G_1 = (Z_1, Y, z_1, P)$ mit
$P = \{z \to g(z, x) f_1(z, x) \mid z \in Z_1 \wedge x \in X\} \cup \{z \to \epsilon \mid z \in Z_1\}$

b) Die Grammatik $G_2 = (N_2, T_2, S_2, P_2)$ sei definiert durch
$N_2 = Z_1 \times Z_2, T_2 = Y, S = (z_1, z_2)$ und
$P = \{(s_1, s_2) \to g(s_1, x)(f_1(s_1, x), f_2(s_2, x)) \mid s_1 \in Z_1 \wedge s_2 \in Z_2 \wedge x \in X\} \cup$
$\{(s_1, s_2) \to \epsilon \mid s_1 \in Z_1 \wedge s_2 \in F\}$
Geben Sie eine mathematisch präzise Beschreibung für $L(G_2)$ an.

$L(G_2) = \{g^{**}(z_1, w) \mid w \in L(A_2)\}$