Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 3

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.
	Name des Tutors:

Ausgabe: 4. November 2009

Abgabe: 13. November 2009, 13:00 Uhr
im Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 3:	/ 16
Blätter 1 – 3:	/ 54

Aufgabe 3.1 (2+3+1+2 Punkte)
Gegeben sei ein Alphabet A und ein Symbol $x \in A$. Wir definieren $\delta_x : A \to \mathbb{N}_0$, wie folgt: $\forall y \in A : \delta_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y \\ 0 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$.

a) Definieren Sie für $x \in A$ induktiv die Funktion $N_x : A^* \to \mathbb{N}_0$, die jedem Wort w aus A^* die Anzahl der Vorkommen des Zeichens x in w zuordnet. Verwenden Sie hierzu die Funktion δ_x.
b) Geben Sie einen Algorithmus an, für den bei Eingabe eines Wortes $w \in A^*$ die Variable r am Ende des Algorithmus den Wert N_x hat. Verwenden Sie die Notation aus der Vorlesung.
c) Die Funktion $P : A^* \times \mathbb{N}_0 \to A^*$ sei induktiv definiert durch

$$\forall w \in A^* : P(w, 0) = \epsilon$$

$$\forall w \in A^* : \forall i \in \mathbb{N}_0 : P(w, i+1) = \begin{cases} P(w,i) \cdot w(i) & \text{falls } i < |w| \\ P(w,i) & \text{sonst} \end{cases}$$

Finden Sie eine Schleifeninvariante für Ihren Algorithmus aus Teilaufgabe b), die den wesentlichen Aspekt der Arbeit Ihres Algorithmus widerspiegelt.
d) Weisen Sie nach, dass Ihre Aussage aus c) tatsächlich Schleifeninvariante ist.

Aufgabe 3.2 (4+1+3 Punkte)
Für Zahlen $a, b \in \mathbb{N}_0$ mit $a + b \geq 1$ sei $ggt(a, b)$ der *größte gemeinsame Teiler* von a und b, d. h. die größte Zahl $t \in \mathbb{N}_0$, die sowohl a als auch b ohne Rest teilt.
Weiterhin seien für natürliche Zahlen $a, b \in \mathbb{N}_0$ die Zahlen $\min(a, b)$ als die kleinere und $\max(a, b)$ als die größere der beiden Zahlen definiert. Falls $a = b$ ist, ist auch $\min(a, b) = \max(a, b)$.

a) Seien $k, g \in \mathbb{N}_0$ natürliche Zahlen mit $k \leq g$. Zeigen Sie folgende Aussagen:
   - $\forall t \in \mathbb{N}_0 : t$ teilt $k \wedge t$ teilt $g \Rightarrow t$ teilt $g - k$
   - $\forall t \in \mathbb{N}_0 : t$ teilt $k \wedge t$ teilt $g - k \Rightarrow t$ teilt g
   - $ggt(k, g) = ggt(k, g - k)$.
b) Gegeben sei folgender Algorithmus mit Eingaben $a, b \in \mathbb{N}_0$ und $a + b \geq 1$:

$x \leftarrow a$
$y \leftarrow b$
for $i \leftarrow 0$ **to** $a + b + 1$ **do**
  $k \leftarrow min(x, y)$
  $g \leftarrow max(x, y)$
  $x \leftarrow k$
  $y \leftarrow g - k$
od

Finden Sie eine Schleifeninvariante, die das Wesentliche dessen, was der Algorithmus macht, widerspiegelt.
c) Erklären Sie, warum nach Ablauf des Algorithmus der Inhalt der Variable y genau $ggt(a, b)$ ist.