Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 7

Aufgabe 7.1 (3 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}_+$.
Gegeben seien die Zahlen $x_0 = 0, \dots x_k = n$ mit
$\forall i \in \mathbb{G}_k : x_i < x_{i+1}$.
(Beispiel: $x_0 = 0, x_1 = 3, x_2 = 7, x_3 = 8, x_4 = 300$)
Die Relation $R \subseteq \mathbb{G}_n \times \mathbb{G}_n$ sei gegeben durch
$(x, y) \in R \iff \exists m \in \mathbb{G}_k : (x_m \leq x < x_{m+1} \wedge x_m \leq y < x_{m+1})$.
Geben Sie eine schematische Darstellung der zur R gehörenden Matrix an.

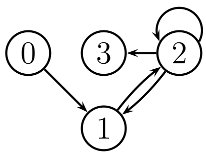
$$\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & \dots & 1 & & & & & & & & \\
\vdots & \ddots & \vdots & & & 0 & & & & 0 & \\
1 & \dots & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 1 & \dots & \dots & 1 & & & & \\
 & & & \vdots & \ddots & & \vdots & & & & \\
 & 0 & & & & & & & & 0 & \\
 & & & \vdots & & \ddots & \vdots & & & & \\
 & & & 1 & \dots & \dots & 1 & & & & \\
 & & & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & & & 1 & \dots & 1 \\
 & 0 & & & & 0 & & & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & & & & & & & & 1 & \dots & 1
\end{array}\right)$$

Aufgabe 7.2 (3+3 Punkte)

Sei $G = (\mathbb{G}_n, E)$ ein gerichteter Graph und A die Adjazenzmatrix von G.
Wir definieren:

$$\begin{aligned} W_0 &= sgn(A + I) \\ \forall i \in \mathbb{N}_0 : W_{i+1} &= sgn(W_i \cdot W_i) \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie W_0, W_1, W_2 und W_3 für den folgenden Graphen:



$$W_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Beweisen Sie für allgemeine gerichtete Graphen $G = (\mathbb{G}_n, E)$:
$\forall i \in \mathbb{N}_0 : (W_i)_{k,l} = 1 \Rightarrow \exists p \in \mathbb{N}_0 : p \leq 2^i \wedge \exists$ Pfad der Länge p von k nach l.

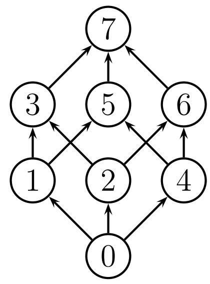
Vollständige Induktion über i:
Induktionsanfang: $i = 0$: Für (k, l) sei $(W_0)_{k,l} = 1$.
$(W_0)_{k,l} = 1 \Rightarrow A_{k,l} = 1 \vee k = l \Rightarrow$ es gibt eine Kante, also einen Pfad der Länge 1, von k nach l, oder es gibt einen Pfad der Länge 0 von k nach l; somit gibt es $p \leq 2^0$ mit $\exists$ Pfad der Länge p von k nach l. $\surd$
Induktionsvoraussetzung: Für ein festes, aber beliebiges $i \in \mathbb{N}_0$ gilt:
$(W_i)_{k,l} = 1 \Rightarrow \exists p \in \mathbb{N}_0 : p \leq 2^i \wedge \exists$ Pfad der Länge p von k nach l.
Induktionsschluss: Wir zeigen, dass dann auch für $i + 1$ gilt:
$(W_{i+1})_{k,l} = 1 \Rightarrow \exists p \in \mathbb{N}_0 : p \leq 2^{i+1} \wedge \exists$ Pfad der Länge p von k nach l.
Sei für (l, k) der Wert $(W_{i+1})_{l,k} = 1$
$(W_{i+1})_{k,l} = 1 \Rightarrow (sgn(W_i \cdot W_i)_{k,l}) = 1 \Rightarrow (W_i \cdot W_i)_{k,l} > 0$
$\Rightarrow \sum_{m=0}^{n-1} (W_i)_{k,m} \cdot (W_i)_{m,l} > 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{G}_n : (W_i)_{k,m} = 1 \wedge (W_i)_{m,l} = 1$
$\overset{IV}{\Rightarrow} \exists p_1, p_2 \in \mathbb{N}_0 : p_1 \leq 2^i \wedge \exists$ Pfad der Länge p_1 von k nach m und $p_2 \leq 2^i \wedge \exists$ Pfad der Länge p_2 von m nach l.
Diese Pfade hintereinandergefügt ergeben einen Pfad der Länge $p_1 + p_2 < 2^i + 2^i = 2^{i+1}$ von k nach l, und die Behauptung ist bewiesen.

Aufgabe 7.3 (2+2+3+3 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}_+$ sei der Graph $G_n = (V_n, E_n)$ gegeben durch

$$V_n = \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x < 2^n\}$$
$$E_n = \{(x, y) \in V_n \times V_n \mid \exists w_1, w_2 \in \{0, 1\}^* : Num_2(w_1 0 w_2) = x \wedge Num_2(w_1 1 w_2) = y\}$$

a) Zeichnen Sie G_3.



b) Geben Sie die Adjazenzmatrix von G_3 an.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Geben Sie die Wegematrix von G_3 an.
(**Hinweis**: Suchen Sie im Graphen nach den Pfaden; verwenden Sie keinen der vorgestellten Algorithmen.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Geben Sie die Wegematrix von G_2 an. Beschreiben Sie, in welcher Beziehung diese Matrix zur Wegematrix von G_3 steht.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sei W_2 die Wegematrix von G_2 und W_3 die Wegematrix von G_3.
Dann gilt $W_3 = \begin{pmatrix} W_2 & W_2 \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}$