Achtung: Die Anwesenheit oder Abwesenheit bestimmter Aufgabentypen in dieser „Übungsklausur“ sagt nichts darüber aus, welche Aufgabentypen in der richtigen Klausur am 10.3. dran kommen.

Pseudo-Klausur zur Vorlesung Grundbegriffe der Informatik 12. Februar 2010

Klausur-nummer			

Name:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	—
max. Punkte	4	6	9	8	5	11	—
tats. Punkte							—

Gesamtpunktzahl:	Note:

Aufgabe 1 (2+2 = 4 Punkte)
Es seien $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ und $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ zwei Funktionen.

a) Zeigen oder widerlegen Sie:
$f(n) \notin O(g(n)) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 : f(n) > g(n)$.

b) Zeigen oder widerlegen Sie:
$\exists n \in \mathbb{N}_0 : f(n) > g(n) \Rightarrow f(n) \notin O(g(n))$.

Aufgabe 2 (3+3 = 6 Punkte)
Es sei $\mathcal{A}$ die Menge aller endlichen Akzeptoren $A = (Z, z_0, X, f, F)$ mit folgenden Eigenschaften:

- $Z = \{0, 1, 2\}$,
- $z_0 = 0$,
- $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$,
- $F = \{0\}$ und
- $\mathtt{aa} \notin L(A) \wedge \mathtt{aaa} \in L(A)$.

a) Geben Sie einen Automaten $A \in \mathcal{A}$ an, für den gilt:

$L(A) = \{\mathtt{a}^{3m} \mid m \in \mathbb{N}_0\} \cup \{w\mathtt{ba}^{3m+2} \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \wedge m \in \mathbb{N}_0\}$.

Falls Sie mit drei Zuständen nicht auskommen, geben Sie einen Akzeptor mit mehr Zuständen an. Sie bekommen dann aber weniger Punkte.

b) Wie viele Elemente enthält $\mathcal{A}$?

Aufgabe 3 (1+1+3+2+2 = 9 Punkte)
Es sei $A = \{0, 1, \mathtt{K}\}$ und $L_1, L_2 \subseteq A^*$ mit

$$L_1 = \{w_1\mathtt{K}w_2 \mid w_1, w_2 \in \{0,1\}^* \wedge Num_2(R(w_1)) < Num_2(w_2) \wedge |w_1| = |w_2|\}$$
$$L_2 = \{w_1\mathtt{K}w_2 \mid w_1, w_2 \in \{0,1\}^* \wedge Num_2(R(w_1)) < Num_2(w_2)\}$$

Dabei bezeichne $R(w)$ das Spiegelbild von w.

a) Geben Sie ein Wort der Länge 7 aus L_1 an.

b) Geben Sie ein Wort der Länge 8 aus $L_2 \setminus L_1$ an.

c) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G_1 an, für die gilt: $L(G_1) = L_1$.

d) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G_2 an, für die gilt: $L(G_2) = L_2$.

e) Geben Sie eine Ableitung für das Wort $111\mathtt{K}10011$ in G_2 an.

Aufgabe 4 (2+2+2+2 = 8 Punkte)
Geben Sie für die folgenden Matrizen jeweils an, ob sie Wegematrix eines Graphen sein können.

Begründen Sie Ihre Antworten! (Insbesondere: Geben Sie für Matrizen M, die Wegematrix sein können, einen Graphen an, dessen Wegematrix M ist.)

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5 (3 Punkte)
Die Relation $R \subseteq M \times M$ sei transitiv, reflexiv und antisymmetrisch.

Zeigen Sie, dass auch die Relation $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$ transitiv, reflexiv und antisymmetrisch ist.

Aufgabe 6 (1+2+2+3+2+1 = 11 Punkte)
Die Turingmaschine T mit Bandalphabet $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \square\}^*$ und Anfangszustand r sei gegeben durch folgende Tabelle:

	r	r_0	r_1	d	l
0	$(r_0, \mathtt{0}, +1)$	$(r_0, \mathtt{0}, +1)$	$(r_1, \mathtt{0}, +1)$	$(d, \mathtt{1}, -1)$	$(l, \mathtt{0}, -1)$
1	$(r_1, \mathtt{1}, +1)$	$(r_1, \mathtt{1}, +1)$	$(r_1, \mathtt{1}, +1)$	$(l, \mathtt{0}, -1)$	$(l, \mathtt{1}, -1)$
$\square$	-	-	$(d, \square, -1)$	-	$(r, \square, +1)$

a) Geben Sie die Anfangskonfiguration für die Eingabe $w = \mathtt{10}$ an.

b) Geben Sie die Konfigurationen an, die bei der Berechnung bei Eingabe von $w = \mathtt{10}$ auftreten, bei denen sich der Schreib-/Lesekopf auf dem ersten Zeichen des Wortes im Zustand r befindet.

c) Sei $w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^+$. Welches Symbol wurde zuletzt vom Schreib-/Lesekopf gelesen, bevor die Maschine anhält? In welche Richtung hat sich der Kopf bei seiner letzten Bewegung bewegt?

d) Zu einem Zeitpunkt während der Berechnung stehe das Wort $w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^+$ auf dem Band und der Schreib-/Lesekopf befinde sich im Zustand r auf dem ersten Zeichen von w.

   Es gebe einen nächsten Zeitpunkt, zu dem sich der Schreib-/Lesekopf wieder im Zustand r auf dem ersten Zeichen des auf dem Band stehenden Wortes befindet.

   Zum nächsten solchen Zeitpunkt stehe das Wort w' auf dem Band.

   In welcher Beziehung stehen w und w'?

e) Schätzen Sie ab, wie viele Schritte T bei Eingabe des Wortes $w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^+$ macht. Vernachlässigen Sie konstante Faktoren.

f) Schätzen Sie im O-Kalkül möglichst präzise ab, wie viele Schritte T bei Eingabe eines Wortes $w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^n$ im schlimmsten Fall ausführen muss.