

**Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
10. März 2010**

**Klausur-
nummer**

--	--	--

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
max. Punkte	6	6	7	7	8	11
tats. Punkte						

Gesamtpunktzahl:

Note:

Aufgabe 1 (2+2+2 = 6 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es um Abbildungen; für $n \in \mathbb{N}_+$ gelte wie in der Vorlesung: $\mathbb{G}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

- a) Sei $n \geq 1$. Wie viele Abbildungen gibt es von einer n -elementigen Menge in eine 2-elementige Menge, die **nicht** surjektiv sind?
- b) Geben Sie zwei Zahlen $n, m \in \mathbb{N}_+$ an, für die gilt: Es gibt mehr injektive Abbildungen von $\mathbb{G}_n$ nach $\mathbb{G}_m$ als surjektive Abbildungen von $\mathbb{G}_m$ nach $\mathbb{G}_n$.

Hinweis: Achten Sie auf die Indizes!

- c) Geben Sie zwei Zahlen $n, m \in \mathbb{N}_+$ an, für die gilt: Es gibt mehr surjektive Abbildungen von $\mathbb{G}_n$ nach $\mathbb{G}_m$ als injektive Abbildungen von $\mathbb{G}_m$ nach $\mathbb{G}_n$.

Hinweis: Achten Sie auf die Indizes!

Aufgabe 2 (2+2+2 = 6 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es um Huffman-Codierungen.

Gegeben sei ein Wort über dem Alphabet $A = \{a, b, c, d\}$ mit folgenden **relativen** Häufigkeiten:

a	b	c	d
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} - x$

wobei $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ gilt.

- Erstellen Sie den Huffman-Baum für $x = \frac{1}{16}$.
- Welche Struktur muss der Huffman-Baum haben, damit die Huffman-Codierung eines Wortes $w \in A^+$ mit den in der Tabelle angegebenen relativen Häufigkeiten echt kürzer als $2|w|$ sein kann?
- Für welche $x \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ werden Wörter mit den angegebenen relativen Häufigkeiten auf genau doppelt so lange Wörter über $\{0, 1\}$ abgebildet?

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 2:

Aufgabe 3 (2+2+3 = 7 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es um Mealy-Automaten.

- a) Sei $X = \{0, 1, 2, 3\}$ und $w = 2103 \in X^*$. Geben Sie ein Wort $w' \in \{0, 1\}^*$ an, so dass $\text{Num}_2(w') = \text{Num}_4(w)$ gilt.
- b) Geben Sie einen Mealy-Automaten $A = (Z, z_0, X, f, Y, g)$ mit $|Z| \leq 3$, $X = \{0, 1, 2, 3\}$ und $Y = \{0, 1\}$ an, so dass für alle Wörter $w \in X^*$ gilt:
 $\text{Num}_4(w) = \text{Num}_2(g^{**}(z_0, w))$.
- c) Geben Sie einen Mealy-Automaten $A = (Z, z_0, X, f, Y, g)$ mit $|Z| \leq 3$, $X = \{0, 1\}$ und $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ an, so dass für alle Wörter $w \in X^*$ **mit gerader Länge** gilt: $\text{Num}_2(w) = \text{Num}_4(g^{**}(z_0, w))$.

Hinweis 1: $g^{**}(z_0, w)$ ist die Konkatenation aller Ausgaben, die A bei Eingabe von w erzeugt.

Hinweis 2: Wenn Ihre Automaten mehr als drei Zustände haben, bekommen Sie weniger Punkte.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 3:

Aufgabe 4 (4+2+1 = 7 Punkte)

Es sei die kontextfreie Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aSa \mid aS \mid b\})$ gegeben.

a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

Wenn $S \Rightarrow^k w$ gilt, dann auch $\exists n, m \in \mathbb{N}_0 : n \geq m \wedge w \in \{a^n S a^m, a^n b a^m\}$.

b) Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq m$ gegeben.

Erklären Sie, wie man das Wort $a^n b a^m$ aus S ableiten kann.

c) Geben Sie eine mathematische Beschreibung von $L(G)$ an.

Hinweis: Abwandlungen von $L(G) = \{w \in X^* \mid S \Rightarrow^* w\}$ geben **keine** Punkte!

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 4:

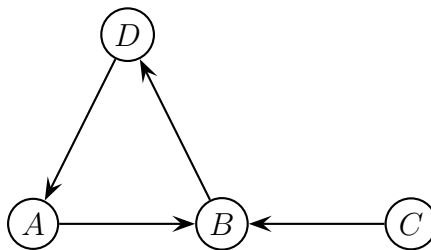
Aufgabe 5 (2+3+1+2 = 8 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph.

Die Relation $S \subseteq V \times V$ sei gegeben durch $\forall x, y \in V : xSy \iff$ es gibt in G einen Pfad von x nach y und es gibt in G einen Pfad von y nach x .

Die Relation $R \subseteq V \times V$ sei gegeben durch $\forall x, y \in V : xRy \iff$ es gibt in G einen Pfad von x nach y .

a) Geben Sie die Relation S für folgenden Graphen G an:



b) Zeigen Sie, dass S für beliebige gerichtete Graphen G eine Äquivalenzrelation ist.

c) Für welche Graphen G gibt es nur eine Äquivalenzklasse bezüglich S ?

d) Zeigen Sie: Für alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in V$ gilt: $x_1Sx_2 \wedge y_1Sy_2 \wedge x_1Ry_1 \Rightarrow x_2Ry_2$.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 5:

Aufgabe 6 (1+1+1+2+2+2+2 = 11 Punkte)

Gegeben sei die folgende Turingmaschine T :

- Zustandsmenge ist $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$.
- Anfangszustand ist z_0 .
- Bandalphabet ist $X = \{\square, a, b\}$.
- Die Arbeitsweise ist wie folgt festgelegt:

	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
a	$(z_1, \square, 1)$	$(z_1, a, 1)$	$(z_3, a, -1)$	-	$(z_4, a, -1)$	$(z_5, b, 1)$
b	$(z_5, a, 1)$	$(z_2, b, 1)$	$(z_2, b, 1)$	$(z_4, a, -1)$	$(z_4, b, -1)$	$(z_5, a, 1)$
$\square$	-	-	$(z_3, \square, -1)$	-	$(z_0, \square, 1)$	$(z_4, \square, -1)$

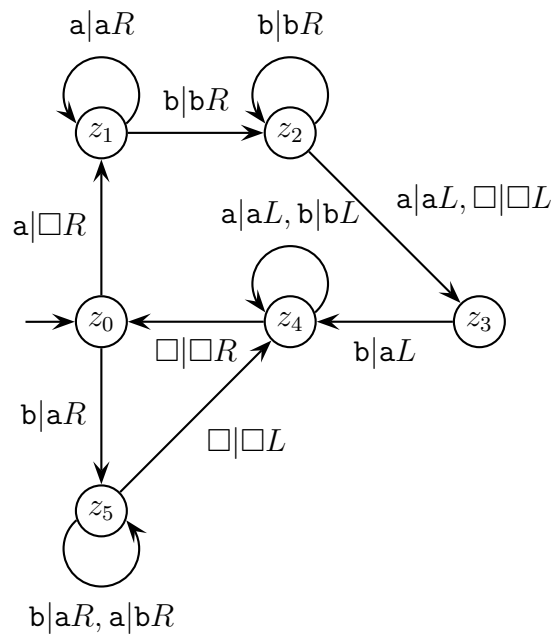
(Darstellung als Graph auf der nächsten Seite)

Die Turingmaschine wird im folgenden für Eingaben $w \in \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0\}$ verwendet, wobei der Kopf der Turingmaschine anfangs auf dem ersten Zeichen von w stehe (sofern w nicht das leere Wort ist).

- Geben Sie die Endkonfiguration der Turingmaschine für die Eingabe $w = aaabb$ an.
- Die Eingabe sei $w = aaabbbb$. Geben Sie die Bandbeschriftung an, wenn T das erste Mal von Zustand z_5 in den Zustand z_4 übergeht.
- Beschreiben Sie, was T macht, wenn T sich im Zustand z_4 befindet (bis sich der Zustand von T ändert).
- Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq m$ und die Eingabe $w = a^n b^m$. Welches Wort steht am Ende der Berechnung auf dem Band?
- Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $n < m$ und die Eingabe $w = a^n b^m$. Welches Wort steht auf dem Band zu dem Zeitpunkt, an dem T zum ersten Mal von Zustand z_5 in den Zustand z_4 wechselt?
- Seien $n, m \in \mathbb{N}_+$ mit $n < m$. Geben Sie Zahlen $n', m' \in \mathbb{N}_0$ mit $n' + m' < n + m$ an, so dass gilt:
Bei Eingabe von $a^n b^m$ ist am Ende der Berechnung das Band leer $\iff$
Bei Eingabe von $a^{n'} b^{m'}$ ist am Ende der Berechnung das Band leer.
- Geben Sie vier verschiedene Paare $(n, m) \in \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$ an, für die gilt: Bei Eingabe von $a^n b^m$ ist am Ende der Berechnung das Band leer.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 6:

Darstellung der Turingmaschine als Graph:



Name:

Matr.-Nr.:

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 6: