

**Lösungsvorschläge zur
Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
10. März 2010**

**Klausur-
nummer**

--	--	--

Name:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
max. Punkte	6	6	7	7	8	11
tats. Punkte						

Gesamtpunktzahl:

Note:

Aufgabe 1 (2+2+2 = 6 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es um Abbildungen; für $n \in \mathbb{N}_+$ gelte wie in der Vorlesung: $\mathbb{G}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

- a) Sei $n \geq 1$. Wie viele Abbildungen gibt es von einer n -elementigen Menge in eine 2-elementige Menge, die **nicht** surjektiv sind?

Lösung: 2

Erklärung: Eine Abbildung auf eine 2-elementige Menge $\{a, b\}$ kann nur dann surjektiv sein, falls alle Elemente auf a oder alle Elemente auf b abgebildet werden.

- b) Geben Sie zwei Zahlen $n, m \in \mathbb{N}_+$ an, für die gilt: Es gibt mehr injektive Abbildungen von \mathbb{G}_n nach \mathbb{G}_m als surjektive Abbildungen von \mathbb{G}_m nach \mathbb{G}_n .

Hinweis: Achten Sie auf die Indizes!

Lösungsvorschlag: $n = 1, m \in \{2, 3, \dots\}$:

Erklärung: Es gibt dann m injektive Abbildungen von \mathbb{G}_n nach \mathbb{G}_m , aber nur eine surjektive Abbildung von \mathbb{G}_m nach \mathbb{G}_n .

- c) Geben Sie zwei Zahlen $n, m \in \mathbb{N}_+$ an, für die gilt: Es gibt mehr surjektive Abbildungen von \mathbb{G}_n nach \mathbb{G}_m als injektive Abbildungen von \mathbb{G}_m nach \mathbb{G}_n .

Hinweis: Achten Sie auf die Indizes!

Lösungsvorschlag: $m = 2, n \in \{4, 5, \dots\}$:

Erklärung: Es gibt dann $n(n-1)$ injektive Abbildungen von \mathbb{G}_m nach \mathbb{G}_n und $2^n - 2$ surjektive Abbildungen von \mathbb{G}_n nach \mathbb{G}_m . (siehe Teilaufgabe a))

Aufgabe 2 (2+2+2 = 6 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es um Huffman-Codierungen.

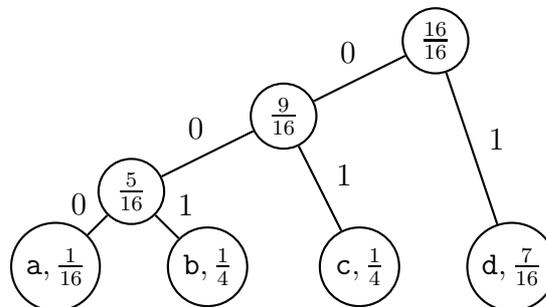
Gegeben sei ein Wort über dem Alphabet $A = \{a, b, c, d\}$ mit folgenden **relativen Häufigkeiten**:

a	b	c	d
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} - x$

wobei $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ gilt.

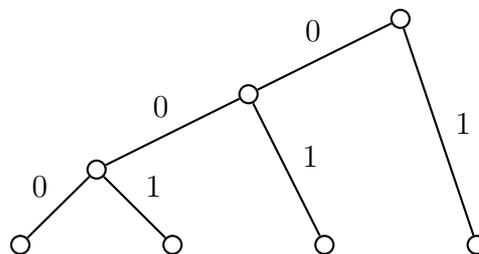
a) Erstellen Sie den Huffman-Baum für $x = \frac{1}{16}$.

Lösung:



b) Welche Struktur muss der Huffman-Baum haben, damit die Huffman-Codierung eines Wortes $w \in A^+$ mit den in der Tabelle angegebenen relativen Häufigkeiten echt kürzer als $2|w|$ sein kann?

Lösung:



c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ werden Wörter mit den angegebenen relativen Häufigkeiten auf genau doppelt so lange Wörter über $\{0, 1\}$ abgebildet?

Lösung: Dies gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{4}$.

Aufgabe 3 (2+2+3 = 7 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es um Mealy-Automaten.

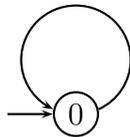
- a) Sei $X = \{0, 1, 2, 3\}$ und $w = 2103 \in X^*$. Geben Sie ein Wort $w' \in \{0, 1\}^*$ an, so dass $Num_2(w') = Num_4(w)$ gilt.

$Num_4(w) = Num_2(10010011)$, also **Lösung:** $w' = 10010011$.

- b) Geben Sie einen Mealy-Automaten $A = (Z, z_0, X, f, Y, g)$ mit $|Z| \leq 3$, $X = \{0, 1, 2, 3\}$ und $Y = \{0, 1\}$ an, so dass für alle Wörter $w \in X^*$ gilt:
 $Num_4(w) = Num_2(g^{**}(z_0, w))$.

Lösungsvorschlag:

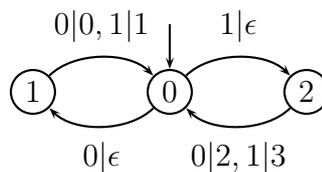
0|00, 1|01, 2|10, 3|11



- c) Geben Sie einen Mealy-Automaten $A = (Z, z_0, X, f, Y, g)$ mit $|Z| < 4$, $X = \{0, 1\}$ und $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ an, so dass für alle Wörter $w \in X^*$ **mit gerader Länge** gilt: $Num_2(w) = Num_4(g^{**}(z_0, w))$.

Hinweis: $g^{**}(z_0, w)$ ist die Konkatenation aller Ausgaben, die A bei Eingabe von w erzeugt.

Lösungsvorschlag:



Aufgabe 4 (4+2+1 = 7 Punkte)

Es sei die kontextfreie Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aSa \mid aS \mid b\})$ gegeben.

a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$\forall k \in \mathbb{N}_0$: Wenn $S \Rightarrow^k w$ gilt, gilt auch $\exists n, m \in \mathbb{N}_0 : n \geq m \wedge w \in \{a^n Sa^m, a^n ba^m\}$.

Lösungsvorschlag:

Induktionsanfang: $k = 0$: $S \Rightarrow^0 w$ bedeutet $w = S = a^0 Sa^0 \Rightarrow \exists n, m \in \mathbb{N}_0 : n \geq m \wedge w \in \{a^n Sa^m, a^n ba^m\}$. ✓

Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}_0$ gelte: Wenn $S \Rightarrow^k w$ gilt, gilt auch $\exists n, m \in \mathbb{N}_0 : n \geq m \wedge w \in \{a^n Sa^m, a^n ba^m\}$.

Induktionsschluss: Es gelte $S \Rightarrow^{k+1} w'$.

Dann gibt es ein $w \in \{S, a, b\}^*$ mit $S \Rightarrow^k w \Rightarrow w'$.

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es $n, m \in \mathbb{N}_0$, so dass gilt:
 $n \geq m \wedge w \in \{a^n Sa^m, a^n ba^m\}$

Da $w \Rightarrow w'$ gilt, muss $w = a^n Sa^m$ gelten.

Wendet man die möglichen Produktionen an, erhält man
 $w' \in \{a^{n+1} Sa^{m+1}, a^{n+1} Sa^m, a^n ba^m\}$.

Da $n+1 \geq m+1$ und $n+1 \geq m$ gilt, falls $n \geq m$ gilt, gibt es in jedem der Fälle $n', m' \in \mathbb{N}_0 : n' \geq m' \wedge w' \in \{a^{n'} Sa^{m'}, a^{n'} ba^{m'}\}$.

Damit ist die Behauptung gezeigt.

b) Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq m$ gegeben.

Erklären Sie, wie man das Wort $a^n ba^m$ aus S ableiten kann.

Lösungsvorschlag: Man ersetzt m mal das Nichtterminal S durch das Wort aSa ; danach ersetzt man $n - m$ mal das Nichtterminal S durch das Wort aS ; schließlich ersetzt man S durch das Wort b .

c) Geben Sie eine mathematische Beschreibung von $L(G)$ an.

Hinweis: Abwandlungen von $L(G) = \{w \in X^* \mid S \Rightarrow^* w\}$ geben **keine** Punkte!

Lösung: $L(G) = \{a^n ba^m \mid n \geq m\}$

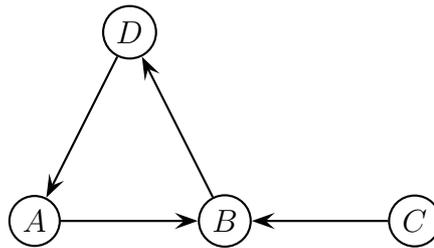
Aufgabe 5 (2+3+1+2 = 8 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph.

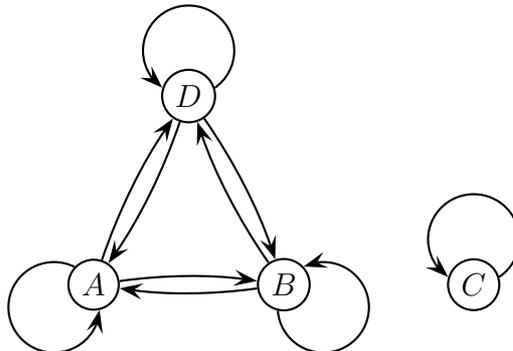
Die Relation $S \subseteq V \times V$ sei gegeben durch $\forall x, y \in V : xSy \iff$ es gibt in G einen Pfad von x nach y und es gibt in G einen Pfad von y nach x .

Die Relation $R \subseteq V \times V$ sei gegeben durch $\forall x, y \in V : xRy \iff$ es gibt in G einen Pfad von x nach y .

a) Geben Sie die Relation S für folgenden Graphen G an:



Lösung:



b) Zeigen Sie, dass S für beliebige gerichtete Graphen G eine Äquivalenzrelation ist.

Lösung:

Reflexivität: Da es für alle $x \in V$ einen Pfad der Länge 0 von x nach x gibt, (sowie einen Pfad der Länge 0 von x nach x), gilt: $\forall x \in V : xSx$.

Symmetrie: $\forall x, y \in V : xSy$

\Rightarrow es gibt einen Pfad von x nach y und es gibt einen Pfad von y nach x

\Rightarrow es gibt einen Pfad von y nach x und es gibt einen Pfad von x nach y

$\Rightarrow ySx$.

Transitivität: $\forall x, y, z \in V : xSy \wedge ySz \Rightarrow$ es gibt einen Pfad von x nach y und es gibt einen Pfad von y nach x und es gibt einen Pfad von y nach z und es gibt einen Pfad von z nach y
 \Rightarrow es gibt einen Pfad von x nach z über y und es gibt einen Pfad von z nach x über $y \Rightarrow xSz$.

c) Für welche Graphen G gibt es nur eine Äquivalenzklasse bezüglich S ?

Lösung: Für streng zusammenhängende Graphen sind alle Knoten zu einander äquivalent.

d) Zeigen Sie: Für alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in V$ gilt: $x_1Sx_2 \wedge y_1Sy_2 \wedge x_1Ry_1 \Rightarrow x_2Ry_2$.

Lösung:

$x_1Sx_2 \wedge y_1Sy_2 \wedge x_1Ry_1 \Rightarrow$ es gibt einen Pfad von x_1 nach x_2 und es gibt einen Pfad von x_2 nach x_1 und es gibt einen Pfad von y_1 nach y_2 und es gibt einen Pfad von y_2 nach y_1 und es gibt einen Pfad von x_1 nach y_1
 \Rightarrow es gibt einen Pfad von x_2 nach x_1 und es gibt einen Pfad von x_1 nach y_1 und es gibt einen Pfad von y_1 nach y_2
 \Rightarrow es gibt einen Pfad von x_2 nach y_2 über x_1 und $y_1 \Rightarrow x_2Ry_2$.

Aufgabe 6 (1+1+1+2+2+2+2 = 11 Punkte)

Gegeben sei die folgende Turingmaschine T :

- Zustandsmenge ist $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$.
- Anfangszustand ist z_0 .
- Bandalphabet ist $X = \{\square, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}$.
- Die Arbeitsweise ist wie folgt festgelegt:

	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
a	$(z_1, \square, 1)$	$(z_1, \mathbf{a}, 1)$	$(z_3, \mathbf{a}, -1)$	-	$(z_4, \mathbf{a}, -1)$	$(z_5, \mathbf{b}, 1)$
b	$(z_5, \mathbf{a}, 1)$	$(z_2, \mathbf{b}, 1)$	$(z_2, \mathbf{b}, 1)$	$(z_4, \mathbf{a}, -1)$	$(z_4, \mathbf{b}, -1)$	$(z_5, \mathbf{a}, 1)$
\square	-	-	$(z_3, \square, -1)$	-	$(z_0, \square, 1)$	$(z_4, \square, -1)$

(Darstellung als Graph auf der nächsten Seite)

Die Turingmaschine wird im folgenden für Eingaben $w \in \{\mathbf{a}^n \mathbf{b}^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0\}$ verwendet, wobei der Kopf der Turingmaschine anfangs auf dem ersten Zeichen von w stehe (sofern w nicht das leere Wort ist).

- a) Geben Sie die Endkonfiguration der Turingmaschine für die Eingabe $w = \mathbf{aaabb}$ an.

Lösung: Die Bandbeschriftung ist \mathbf{aa} , der Kopf steht im Zustand z_1 auf dem ersten Bandsymbol hinter dem Wort.

- b) Die Eingabe sei $w = \mathbf{aaabbbbbb}$. Geben Sie die Bandbeschriftung an, wenn T das erste Mal von Zustand z_5 in den Zustand z_4 übergeht.

Lösung: \mathbf{aabbb}

- c) Beschreiben Sie, was T macht, wenn T sich im Zustand z_4 befindet (bis sich der Zustand von T ändert).

Lösung: T fährt an das erste Bandsymbol vor der Bandbeschriftung(, ohne etwas an der Beschriftung zu ändern).

- d) Sei $n \geq m$ und die Eingabe $w = \mathbf{a}^n \mathbf{b}^m$. Welches Wort steht am Ende der Berechnung auf dem Band?

Lösung: \mathbf{a}^{n-1} falls $n \geq 1$; andernfalls das leere Wort

- e) Sei $n < m$ und die Eingabe $w = \mathbf{a}^n \mathbf{b}^m$. Welches Wort steht auf dem Band zu dem Zeitpunkt, an dem T zum ersten Mal von Zustand z_5 in den Zustand z_4 wechselt?

Lösung: $\mathbf{a}^{m-n} \mathbf{b}^n$

- f) Seien $n, m \in \mathbb{N}_+$ mit $n < m$. Geben Sie Zahlen $n', m' \in \mathbb{N}_0$ mit $n' + m' < n + m$ an, so dass gilt:

Bei Eingabe von $\mathbf{a}^n \mathbf{b}^m$ ist am Ende der Berechnung das Band leer \iff Bei Eingabe von $\mathbf{a}^{n'} \mathbf{b}^{m'}$ ist am Ende der Berechnung das Band leer.

Lösung: $n' = m - n, m' = n$

- g) Geben Sie vier verschiedene Paare $(n, m) \in \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$ an, für die gilt: Bei Eingabe von $\mathbf{a}^n \mathbf{b}^m$ ist am Ende der Berechnung das Band leer.

Lösungsvorschlag: $(n, m) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 8), (8, 13), \dots\}$.

Vier Paare haben genügt.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 6:

Darstellung der Turingmaschine als Graph:

