

Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 5

Aufgabe 5.1 (2+2 Punkte)

Gegeben sei folgende Grammatik $G = (N, T, S, P)$:

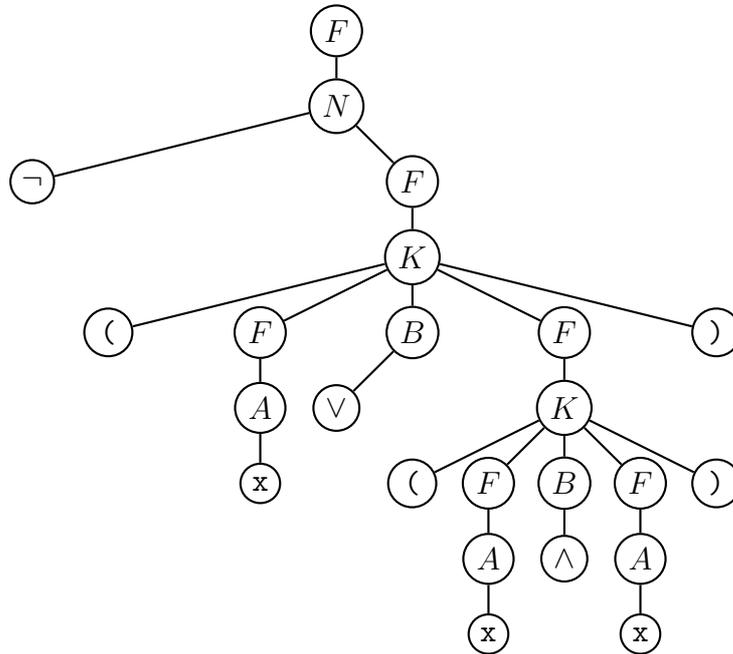
$$\begin{aligned} N &= \{\langle \text{Formel} \rangle, \langle \text{Atom} \rangle, \langle \text{Negation} \rangle, \langle \text{KonDis} \rangle, \langle \text{BinOp} \rangle\} \\ T &= \{\mathbf{x}, \neg, \wedge, \vee, (,)\} \\ S &= \langle \text{Formel} \rangle \\ P &= \{\langle \text{Formel} \rangle \rightarrow \langle \text{Atom} \rangle \mid \langle \text{Negation} \rangle \mid \langle \text{KonDis} \rangle, \\ &\quad \langle \text{Atom} \rangle \rightarrow \langle \text{Atom} \rangle \mid \mathbf{x}, \\ &\quad \langle \text{Negation} \rangle \rightarrow \neg \langle \text{Formel} \rangle, \\ &\quad \langle \text{KonDis} \rangle \rightarrow (\langle \text{Formel} \rangle \langle \text{BinOp} \rangle \langle \text{Formel} \rangle), \\ &\quad \langle \text{BinOp} \rangle \rightarrow \vee \mid \wedge \\ &\quad \}. \end{aligned}$$

- a) Geben Sie ein Wort der von G erzeugten Sprache $L(G)$ an, in dem jedes Terminalsymbol mindestens einmal und höchstens dreimal vorkommt.
- b) Stellen Sie zu ihrem Wort einen Ableitungsbaum auf. Sie können dabei die Nichtterminalsymbole durch ihre Anfangsbuchstaben abkürzen.

Lösung 5.1

a) $\neg(\mathbf{x} \vee (\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}))$

b)



Aufgabe 5.2 (2+3+2 Punkte)

Gegeben sei folgende Grammatik: $G = 9\{S, E, M\}, \{ a, -, (,), = \}, S, P)$ mit der Produktionenmenge

$$P = \{ \begin{array}{l} S \rightarrow E) , \\ E \rightarrow aEa \mid M=-(M , \\ M \rightarrow aMa \mid - \}. \end{array}$$

- a) Geben Sie für das Wort $a^4-a^3=-(a^2-a^3)$ (also für $aaaa-aaa=-(aa-aaa)$) eine Ableitung oder den Ableitungsbaum an.
- b) Es gelte $m - n = l - k = 2$.
Erklären Sie, wie sich das Wort $a^m-a^n=-(a^k-a^l)$ aus S ableiten lässt.
- c) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für m, n, k, l an, so dass gilt: $a^m-a^n=-(a^k-a^l) \in L(G)$.

Lösung 5.2

a)

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow E) \\ &\Rightarrow aEa) \\ &\Rightarrow aM=-(Ma) \\ &\Rightarrow aaMa=-(Ma) \Rightarrow aaaMaa=-(Ma) \Rightarrow aaaaMaaa=-(Ma) \\ &\Rightarrow aaaaMaaa=-(aMaa) \Rightarrow aaaaMaaa=-(aaMaaa) \\ &\Rightarrow aaaa-aaa=-(aaMaaa) \Rightarrow aaaa-aaa=-(aa-aaa) \end{aligned}$$

- b)
- S durch $E)$ ersetzen.
 - 2-mal E durch aEa ersetzen.
 - E durch $M=-(M$ ersetzen.
 - das linke M n -mal durch aMa ersetzen,
 - das rechte M k -mal durch aMa ersetzen.
 - beide M durch $-$ ersetzen.

c) $m, n, k, l \in \mathbb{N}_0 \wedge m - n = l - k \geq 0$

Aufgabe 5.3 (4+3+2 Punkte)

Gegeben sei folgende Sprache:

$$\begin{aligned} L_0 &= \{\varepsilon\}, \\ \forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} &= L_i \cup \{(\cdot L_i \cdot L_i \cdot \cdot)\}. \end{aligned}$$

- a) Zeigen Sie: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall w \in L_n : w$ ist ein wohlgeformter Klammerausdruck.
- b) Geben Sie einen wohlgeformten Klammerausdruck der Länge 6 an, der nicht in $L = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i$ liegt. Begründen Sie, warum Ihr gewähltes Wort nicht in L liegt.
- c) Welche Länge hat das längste Wort in L_n ?

Lösung 5.3

- a) **Induktionsanfang:** $n = 0$: $L_0 = \{\varepsilon\}$. Dies ist nach unserer Definition ein wohlgeformter Klammerausdruck. ✓

Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte
Alle Wörter $w \in L_n$ sind wohlgeformte Klammerausdrücke.

Induktionsschluss: Wir zeigen, dass dann auch alle Wörter $w \in L_{n+1}$ wohlgeformte Klammerausdrücke sind.

Sei w ein beliebiges Wort $\in L_{n+1}$. Nach (der rekursiven) Definition ist $w \in L_n$ oder $\exists w_1, w_2 \in L_n : w = (w_1 \cdot w_2)$. Im ersten Fall ist nach IV w ein wohlgeformter Klammerausdruck. Per Definition gilt:

- Wenn w_1, w_2 wohlgeformte Klammerausdrücke sind, dann auch $w_1 \cdot w_2$.
- Wenn $w_1 \cdot w_2$ wohlgeformter Klammerausdruck ist, dann auch $(w_1 \cdot w_2)$.

Folglich ist auch $w = (w_1 \cdot w_2)$ ein wohlgeformter Klammerausdruck. □.

Punkteverteilung: IA und IV geben jeweils einen Punkt, der IS gibt 2 Punkte.

- b) $()()()$ liegt nicht in L .

$L_0 = \{\varepsilon\}$, also liegt $()()()$ nicht in L_0 .

Nach rekursiver Definition der Sprache gilt: $L_{n+1} = L_n \cup \{(\} \cdot L_n \cdot L_n \cdot \{\})\}$. Wenn $()()()$ also in der Sprache $L_{n+1} \setminus L_n$ enthalten wäre, müsste auch $()()()$ in $L_n \cdot L_n$ enthalten sein. Da in L_n nur wohlgeformte Klammerausdrücke liegen (siehe Teilaufgabe a)), liegen auch in $L_n \cdot L_n$ nur wohlgeformte Klammerausdrücke. $()()()$ ist kein wohlgeformter Klammerausdruck, deswegen kann $()()()$ in keinem L_n und folglich auch nicht in L liegen.

Punkteverteilung: Einen Punkt für einen richtigen Ausdruck, 2 Punkte für die Begründung.

- c) Das längste Wort in L_n ist $2^{n+1} - 2$ Zeichen lang.

Erläuterung: Wer wissen will, warum das so ist: Ein längstes Wort w_{n+1} in L_{n+1} erhält man, indem man ein längstes Wort w_n aus L_n nimmt, und daraus $(w_n w_n)$ konstruiert. Also ist $|w_{n+1}| = 2 + 2|w_n|$. Man rechnet: $2 + 2(2^{n+1} - 2) = 2^{(n+1)+1} - 2$ (Induktion ...).