Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
1. September 2011

Klausur-nummer

Name:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	5	5	6	7	5	6	8
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:	Note:

Aufgabe 1 (5 Punkte)

1. Gegeben sei die formale Sprache $L_1 = \left(\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \cdot \{\mathtt{c}\}\right)^*$. Geben Sie alle Wörter der Länge 2 in L_1 an.

2. Geben Sie eine Menge L_2 von Wörtern an, so dass gilt:

$$L_2 \cdot L_2 = \{\mathtt{aa}, \mathtt{aba}, \mathtt{aab}, \mathtt{abab}\}$$

3. Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G_3 = (\{S, X, Y, Z\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{f}\}, S, P)$ mit folgender Produktionenmenge

$$\begin{aligned} P = \{ \quad & S \to \mathtt{a}S \mid S\mathtt{b} \mid \varepsilon \mid X, \\ & X \to \mathtt{d}Z \mid Y\mathtt{e} \mid \mathtt{f}Y, \\ & Y \to \varepsilon, \\ & Z \to \mathtt{d}X \\ \} & \end{aligned}$$

   Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der genau $L(G_3)$ beschreibt.

4. Es seien $R, S, T \subseteq M \times M$ binäre Relationen auf einer Menge M. Beweisen oder widerlegen Sie (durch Angabe eines Gegenbeispiels):

$$R \circ S \cap R \circ T \subseteq R \circ (S \cap T)$$

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 1:

Aufgabe 2 (5 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es um ungerichtete Graphen ohne Schlingen.

1. Zeichnen Sie alle paarweise nichtisomorphen ungerichteten schlingenfreien Graphen mit genau 5 Knoten und genau 5 Kanten, die einen Weg besitzen, in dem alle Knoten vorkommen.

   Suchen Sie sich einen Ihrer Graphen aus und geben Sie für ihn die Wegematrix an.

2. Zeichnen Sie alle paarweise nichtisomorphen ungerichteten schlingenfreien Graphen mit genau 6 Knoten, die alle Grad 1 haben.

3. Wieviele ungerichtete schlingenfreie Graphen mit Knotenmenge $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ gibt es, bei denen alle Knoten Grad 1 haben?

Achtung: Bei den ersten beiden Teilaufgaben gibt es bei Angabe mehrerer isomorpher Graphen Punktabzug. (Aber man kann auf keine Teilaufgabe weniger als 0 Punkte bekommen.)

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 2:

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Eine Funktion $T(n) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ sei rekursiv wie folgt definiert:

- $T(0) = 2$
- $T(1) = 3$
- Für alle $n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{0, 1\}$ sei:

$$T(n) = 3 \cdot T(n-1) - 2 \cdot T(n-2)$$

1. Geben Sie die Funktionswerte $T(n)$ für $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ an.
2. Geben Sie eine geschlossene Formel $F(n)$ (d. h. einen arithmetischen Ausdruck) für $T(n)$ an.
3. Beweisen Sie durch Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $F(n) = T(n)$.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 3:

Aufgabe 4 (7 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es um Huffman-Codierungen.

1. Gegeben sei das Alphabet $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{f}, \mathtt{g}\}$ und ein Wort $w \in A^*$ in dem die Symbole mit folgenden Häufigkeiten vorkommen:

a	b	c	d	e	f	g
11	3	11	24	8	7	36

   (a) Zeichnen Sie den Huffman-Baum.

   (b) Geben Sie die Huffman-Codierung des Wortes `bad` an.

2. Für $k \geq 1$ sei ein Alphabet $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$ mit $k + 1$ Symbolen gegeben und ein Text, in dem jedes Symbol a_i mit Häufigkeit 2^i vorkommt für $0 \leq i \leq k$.

   Geben Sie die Huffman-Codierungen aller Symbole a_i an.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 4:

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Es sei A ein nichtleeres Alphabet.

Für $x \in A$ und $w \in A^*$ sei $N_x(w)$ die Anzahl der Vorkommen des Zeichens x im Wort w.

Wir definieren auf A^* eine binäre Relation $\sqsubseteq$ wie folgt:

$$w_1 \sqsubseteq w_2 \quad \text{genau dann, wenn} \quad \forall x \in A : N_x(w_1) \leq N_x(w_2)$$

1. Besitzt die Relation $\sqsubseteq$ ein kleinstes Element?
   Wenn ja: Geben Sie das kleinste Element an.
   Wenn nein: Beweisen Sie, dass es keines gibt.

2. Besitzt die Relation $\sqsubseteq$ ein größtes Element?
   Wenn ja: Geben Sie das größte Element an.
   Wenn nein: Beweisen Sie, dass es keines gibt.

3. Zeigen Sie, dass die Relation $\sqsubseteq$ nicht antisymmetrisch ist, wenn A mindestens zwei Symbole enthält.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 5:

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Die Sprache $L \subseteq \{0, 1\}^*$ sei definiert als die Menge aller Wörter w, die die Binärzahldarstellung einer durch 3 teilbaren Zahl sind.

1. Geben Sie alle Wörter aus L an, deren Länge höchstens 3 ist.
2. Geben Sie einen endlichen Akzeptor an, der L erkennt.
3. Es sei L' die Menge aller Wörter aus L (!), die Länge 1 haben oder mit dem Symbol 1 beginnen.

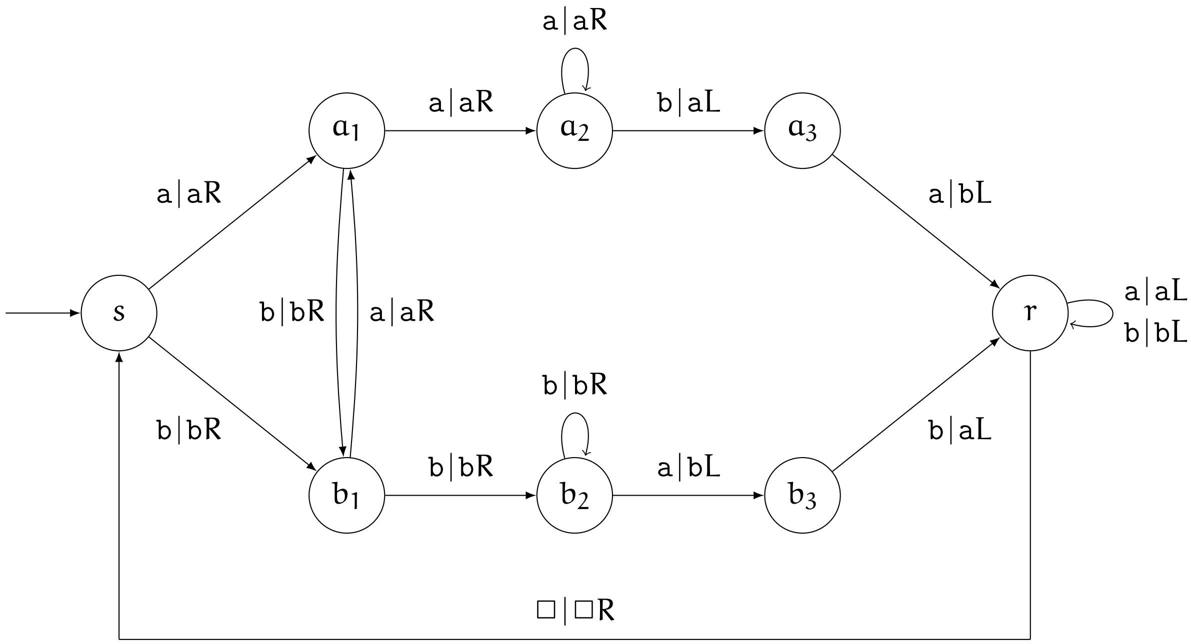
   Geben Sie einen endlichen Akzeptor an, der L' erkennt.

Hinweis: Es muss sich um vollständige deterministische endliche Akzeptoren handeln wie sie in der Vorlesung definiert wurden.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 6:

Aufgabe 7 (8 Punkte)
Gegeben sei die folgende Turingmaschine T:

- Zustandsmenge ist $Z = \{s, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, r\}$.
- Anfangszustand ist s.
- Bandalphabet ist $X = \{\square, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.
- Die Arbeitsweise ist durch folgendes Diagramm festgelegt:



Die Turingmaschine wird im folgenden benutzt für Bandbeschriftungen, bei denen zu Beginn der Berechnung auf dem Band ein Wort $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^+$ steht, das von Blanksymbolen umgeben ist.

Der Kopf der Turingmaschine stehe anfangs auf dem ersten Symbol des Eingabewortes.

1. Geben Sie für die Eingabe `aaabbb` folgende Konfigurationen an:
   - die Anfangskonfiguration;
   - die Endkonfiguration;
   - jede Konfiguration, die in einem Zeitschritt vorliegt, nachdem die Turingmaschine vom Zustand r in den Zustand s gewechselt hat.
2. Zu Beginn stehe auf dem Band ein Wort der Form $\mathtt{a}^k\mathtt{b}^m$ mit $k \geq 1$ und $m \geq 0$. Welches Wort steht am Ende (wenn die Turingmaschine gehalten hat) auf dem Band, wenn
   (a) $k \leq m$ ist?
   (b) $k > m$ ist?

3. Für welche Eingabewörter hält die Turingmaschine in Zustand a_1 an?
4. Geben Sie eine Funktion $f(n)$ an, so dass die Laufzeit der Turingmaschine für Eingaben der Form $(\mathtt{ab})^n$ in $\Theta(f(n))$ liegt.
5. Geben Sie eine Funktion $g(n)$ an, so dass die Laufzeit der Turingmaschine für Eingaben der Form $\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n$ in $\Theta(g(n))$ liegt.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 7: