

**Klausur zur Vorlesung  
Grundbegriffe der Informatik  
1. März 2011**

**Klausur-  
nummer**

--	--	--

Name:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	6	9	4	9	5	5	9
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:
------------------

Note:
-------

---

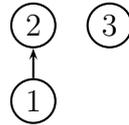
**Aufgabe 1** (1,5+1,5+1+2=6 Punkte)

- a) Geben Sie das Hasse-Diagramm einer Halbordnung auf einer dreielementigen Menge an, die genau zwei maximale und zwei minimale Elemente besitzt.
- b) Sei  $A$  ein Alphabet und  $L \subseteq A^*$  eine **endliche** Menge.  
Geben Sie die Menge der Produktionen einer rechtslinearen Grammatik an, die  $L$  erzeugt.
- c) Geben Sie einen regulären Ausdruck  $R$  an, so dass gilt:  
 $\langle R \rangle = \{vw \mid v, w \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}^* \wedge N_{\mathbf{c}}(v) = N_{\mathbf{b}}(w) = 0\}$   
( $N_{\mathbf{b}}(w)$  ist die Anzahl der Vorkommen des Zeichens  $\mathbf{b}$  in  $w$ ).
- d) Geben Sie eine Funktion  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  an, für die gilt:  
 $f(n) \notin O(n^2) \wedge f(n) \notin \Omega(n^2 \log n)$

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 1:

**Lösung:**

a) Das Hassediagramm sieht z. B. wie folgt aus:



b)  $P = \{(S, w) \mid w \in L\}$  bzw.  $P = \{S \rightarrow w \mid w \in L\}$

c)  $(a|b)^*(a|c)^*$

d) Beispiele:

- $f(n) = n^2 \log(\log n), f(n) = n^2 \sqrt{\log n}, \dots$
- aber z. B. auch

$$f(n) = \begin{cases} n^2 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n^2 \log n & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} .$$

---

**Aufgabe 2** (5+2+2 = 9 Punkte)

Für  $n \in \mathbb{N}_0, n \geq 2$  sei ein Graph  $U_n = (\mathbb{G}_{2n}, E_n)$  definiert mit Kantenmenge  $E_n = \{\{x, y\} \mid \text{ggT}(x + y, 2n) = 1\}$ .

Zur Erinnerung: Für  $m \in \mathbb{N}_0$  ist  $\mathbb{G}_m = \{i \mid 0 \leq i < m\}$  und  $\text{ggT}(x, y)$  ist der größte gemeinsame Teiler von  $x$  und  $y$ .

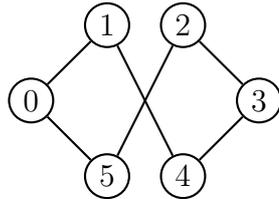
- a) Zeichnen Sie die Graphen  $U_3, U_4$  und  $U_5$ .
- b) Geben Sie für  $U_4$  und  $U_5$  jeweils einen Weg an, bei dem der Anfangsknoten gleich dem Endknoten ist, und jeder andere Knoten des Graphen genau einmal in dem Weg vorkommt.
- c) Geben Sie die Adjazenzmatrix für  $U_4$  an.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 2:

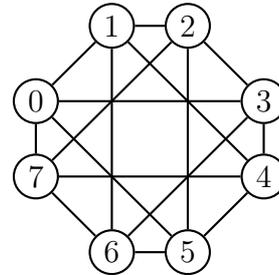
**Lösung:**

a)

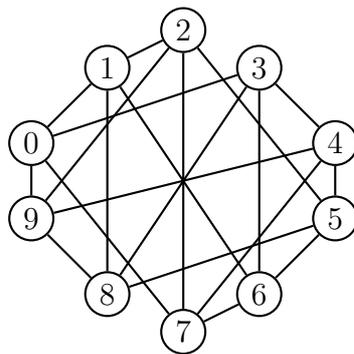
$U_3$ :



$U_4$ :



$U_5$ :



b) Weg für  $U_4$ :  $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0)$ .

Weg für  $U_5$ :  $(0, 1, 2, 7, 6, 5, 4, 3, 8, 9, 0)$ .

c)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

---

**Aufgabe 3** (4 Punkte)

Die Menge  $M \subseteq \mathbb{N}_0$  sei definiert durch:

- 5 und 8 liegen in  $M$ .
- Für alle  $m, n$  gilt:  
Wenn  $n$  und  $m$  in  $M$  liegen, dann ist auch  $n^2 + m^2$  in  $M$ .
- Keine anderen Zahlen liegen in  $M$ .

Zeigen Sie durch strukturelle Induktion:

$$\forall n \in M : n \bmod 3 = 2 .$$

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 3:

**Lösung:**

**Induktionsanfang:**  $5 \bmod 3 = 8 \bmod 3 = 2$ .

**Induktionsvoraussetzung:**

Für beliebige aber feste  $n, m \in M$  gelte:  $n \bmod 3 = 2 \wedge m \bmod 3 = 2$ .

**Induktionsschritt:** Wir zeigen, dass dann auch  $(n^2 + m^2) \bmod 3 = 2$  gilt.

Da  $n \bmod 3 = m \bmod 3 = 2$  ist, gibt es Zahlen  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ , so dass  $n = 3k_1 + 2$  und  $m = 3k_2 + 2$  gilt.

Es folgt mit den binomischen Formeln:

$$n^2 + m^2 = 9k_1^2 + 12k_1 + 4 + 9k_2^2 + 12k_2 + 4 = 3(3k_1^2 + 3k_2^2 + 4k_1 + 4k_2) + 8 = 3(3k_1^2 + 3k_2^2 + 4k_1 + 4k_2 + 2) + 2, \text{ und es gilt } (n^2 + m^2) \bmod 3 = 2.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

(Alternativ: Aus  $n \bmod 3 = 2$  folgt  $n^2 \bmod 3 = 2^2 \bmod 3 = 4 \bmod 3 = 1$ ; ebenso gilt  $m^2 \bmod 3 = 1$ , und es folgt  $(n^2 + m^2) \bmod 3 = 1 + 1 = 2$ .)

---

**Aufgabe 4** (3+2+2+2 = 9 Punkte)

Gegeben sei das Alphabet  $A = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ .

Wir betrachten die Sprache  $L = \{\mathbf{a}^k \mathbf{b}^m \mathbf{a}^{m-k} \mid m, k \in \mathbb{N}_0 \wedge m \geq k\}$  über  $A$ .

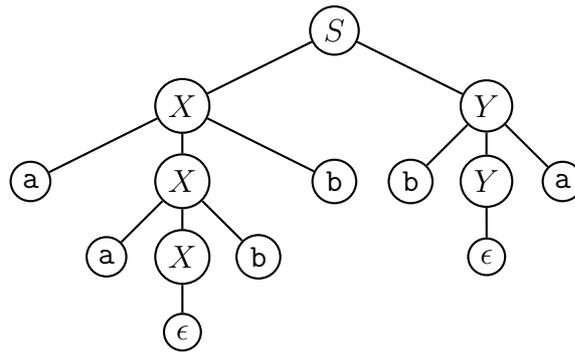
- a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik  $G$  an, so dass gilt:  $L(G) = L$ .
- b) Geben Sie für Ihre Grammatik aus Teilaufgabe a) einen Ableitungsbaum für das Wort  $\mathbf{aabbba}$  an.
- c) Geben Sie alle  $n \in \mathbb{N}_0$  an, für die gilt:  $L \cap A^n \neq \{\}$
- d) Sei  $n \in \mathbb{N}_0$  so gewählt, dass  $L \cap A^n \neq \{\}$  gilt. Wie viele Elemente enthält  $L \cap A^n$ ?

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 4:

**Lösung:**

a)  $G = (\{S, X, Y\}, \{a, b\}, S, P)$  mit  
 $P = \{S \rightarrow XY, X \rightarrow aXb \mid \epsilon, Y \rightarrow bYa \mid \epsilon\}$ .

b) Der Ableitungsbaum sieht wie folgt aus:



c) Es gilt  $L \cap A^n \neq \{\}$  genau dann, wenn  $n$  gerade ist.

d)  $L \cap A^n = \{a^k b^{n/2} a^{n/2-k} \mid 0 \leq k \leq n/2\}$ .

Es folgt  $|L \cap A^n| = n/2 + 1$ .

---

**Aufgabe 5** (1+2+2 = 5 Punkte)

Für eine Relation  $R \subseteq M \times M$  auf einer Menge  $M$  definieren wir die Relation  $R^{-1}$  wie folgt:

$$R^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\} .$$

Außerdem hatten wir in der Vorlesung festgelegt:

$$R^0 = \{(x, x) \mid x \in M\} .$$

Widerlegen Sie durch Gegenbeispiel oder beweisen Sie:

- a) Wenn  $R \cap R^{-1} = R^0$  gilt, ist  $R$  reflexiv.
- b) Wenn  $R \cap R^{-1} = R^0$  gilt, ist  $R$  symmetrisch.
- c) Wenn  $R \cap R^{-1} = R^0$  gilt, ist  $R$  antisymmetrisch.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 5:

**Lösung:**

a) Die Aussage ist korrekt:

Wenn  $R \cap R^{-1} = R^0$  gilt, gilt für alle  $x \in M : (x, x) \in R^0 = R \cap R^{-1} \subseteq R$ .

Somit ist  $R$  reflexiv.

b) Die Aussage ist falsch:

Sei  $M = \{1, 2\}$  und  $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$ .

Dann gilt  $R \cap R^{-1} = \{(1, 1), (2, 2)\} = R^0$ , aber  $R$  ist nicht symmetrisch, da  $(1, 2) \in R$  aber  $(2, 1) \notin R$  gilt.

c) Die Aussage ist korrekt:

Es gelte  $R \cap R^{-1} = R^0$ .

Wir betrachten  $x, y \in M$  mit  $(x, y) \in R$  und  $(y, x) \in R$ . Dann gilt nach Definition von  $R^{-1}$ :  $(y, x) \in R^{-1}$  und  $(x, y) \in R^{-1}$ .

Somit folgt  $(x, y) \in R \cap R^{-1} = R^0 = \{(z, z) \mid z \in M\}$ , und somit muss  $x = y$  gelten, was die Antisymmetrie beweist.

---

**Aufgabe 6** (1+2+2 = 5 Punkte)

Die Sprache  $L \subseteq \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^*$  sei definiert als die Menge aller Wörter  $w$ , die folgende Bedingungen erfüllen:

- $N_{\mathbf{b}}(w) > N_{\mathbf{a}}(w)$       und
- $\forall v_1, v_2 \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^* : w \neq v_1 \mathbf{b} \mathbf{b} v_2$

a) Geben Sie alle Wörter aus  $L$  an, die genau 4 mal das Zeichen  $\mathbf{b}$  enthalten.

b) Geben Sie einen regulären Ausdruck  $R$  an, so dass gilt:  
 $\langle R \rangle = L$ .

c) Geben sie einen endlichen Akzeptor an, der  $L$  erkennt.

Hinweis: Es muss sich um einen vollständigen deterministischen endlichen Akzeptor handeln wie er in der Vorlesung definiert wurde.

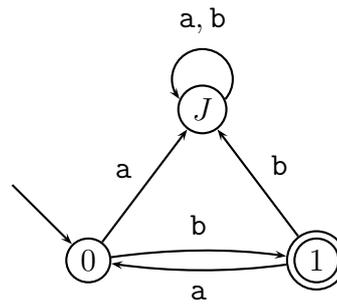
Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 6:

**Lösung:**

a) bababab

b)  $R = (ba)^*b$ .

c) Der Automat sieht folgendermaßen aus:



---

**Aufgabe 7** (4+2+1+2 = 9 Punkte)Gegeben sei die folgende Turingmaschine  $T$ :

- Zustandsmenge ist  $Z = \{r, s, u, d_{\mathbf{b}}, d_{\mathbf{a}}\}$ .
- Anfangszustand ist  $r$ .
- Bandalphabet ist  $X = \{\square, \mathbf{a}, \mathbf{b}, 0, 1\}$ .
- Die Arbeitsweise ist wie folgt festgelegt:

	$r$	$s$	$u$	$d_{\mathbf{b}}$	$d_{\mathbf{a}}$
0	$(r, 0, 1)$	$(s, 1, -1)$	$(r, 0, 1)$	–	–
1	$(r, 1, 1)$	$(r, 0, 1)$	$(r, 1, 1)$	$(d_{\mathbf{b}}, \square, 1)$	–
$\mathbf{a}$	$(s, \mathbf{b}, -1)$	–	–	–	$(d_{\mathbf{a}}, \square, 1)$
$\mathbf{b}$	$(r, \mathbf{b}, 1)$	$(s, \mathbf{b}, -1)$	$(u, \mathbf{a}, -1)$	$(d_{\mathbf{a}}, \square, 1)$	$(d_{\mathbf{a}}, \mathbf{b}, 1)$
$\square$	$(u, \square, -1)$	$(d_{\mathbf{b}}, \square, 1)$	–	–	–

Die Turingmaschine wird im folgenden benutzt für Bandbeschriftungen, bei denen zu Beginn der Berechnung auf dem Band ein Wort  $v \in \{0, 1\}^+ \cdot \{\mathbf{a}\}^+$  steht, das von Blanksymbolen umgeben ist.

Der Kopf der Turingmaschine stehe anfangs auf dem ersten Symbol des Eingabewortes.

a) Geben Sie für die Eingabe 0100aaa folgende Konfigurationen an:

- die Anfangskonfiguration;
- die Endkonfiguration;
- jede Konfiguration, die in einem Zeitschritt vorliegt, nachdem die Turingmaschine von einem Zustand ungleich  $r$  in den Zustand  $r$  wechselt.

b) Am Anfang stehe ein Wort  $w\mathbf{a}^k$  mit  $w \in \{0, 1\}^+$  und  $k \in \mathbb{N}_+$  auf dem Band, für das gelte, dass die Turingmaschine während der Berechnung mindestens einmal in den Zustand  $u$  übergehen wird.

Welches Wort steht auf dem Band, nachdem  $T$  zum ersten Mal vom Zustand  $u$  in den Zustand  $r$  übergegangen ist?

c) Am Anfang stehe ein Wort  $w\mathbf{a}^k$  mit  $w \in \{0, 1\}^+$  und  $k \in \mathbb{N}_+$  auf dem Band. Was muss für  $w$  und  $k$  gelten, damit  $T$  niemals in den Zustand  $u$  übergeht?

d) Am Anfang stehe ein Wort  $w\mathbf{a}^k$  mit  $w \in \{0, 1\}^+$  und  $k \in \mathbb{N}_+$  auf dem Band. Welches Wort steht am Ende der Berechnung auf dem Band?

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 7:

**Lösung:**

- a) Wir schreiben den Zustand der Turingmaschine immer vor das Zeichen, auf dem sich der Kopf befindet.

Anfangskonfiguration:  $r0100aaa$

Zwischenkonfigurationen:

$00r11baa$

$0010rbba$

$000r1bbb$

$0001raaa$

$0000rbaa$

Endkonfiguration:  $b \square d_a \square$

- b)  $0^{|w| - |\text{Repr}_2(\text{Num}_2(w) - k)|} \text{Repr}_2(\text{Num}_2(w) - k) \mathbf{a}^k$   
(Hinweis:  $\text{Repr}_2(\text{Num}_2(w) - k) \mathbf{a}^k$  gibt auch noch viele Punkte.)
- c)  $\text{Num}_2(w) < k$ .
- d)  $\mathbf{b}^{\text{Num}_2(w) \bmod k}$