Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1.1 (2+2+2 Punkte)

a) Stellen Sie folgende Formel mit möglichst wenig Aussagevariablen dar und überprüfen Sie Ihr Ergebnis anhand einer Wahrheitstabelle.

$$(A \vee B) \Rightarrow ((\neg A \vee B) \wedge (A \Rightarrow \neg A))$$

b) Stellen Sie für folgende Formel eine Wahrheitstabelle auf.

$$((A \wedge \neg B) \vee (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

c) Stellen Sie für folgende Formel eine Wahrheitstabelle auf.

$$(C \Rightarrow B) \vee ((A \wedge \neg B) \wedge (C \wedge \neg B))$$

Lösung 1.1

a) Die Formel ist äquivalent zu $\neg A$

Hinweis: Die folgende Umformung ist nicht verlangt

$$\begin{aligned}
(A \vee B) \Rightarrow ((\neg A \vee B) \wedge (A \Rightarrow \neg A)) &\Leftrightarrow \\
(A \vee B) \Rightarrow ((\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg A)) &\Leftrightarrow \\
(A \vee B) \Rightarrow ((\neg A \vee B) \wedge (\neg A)) &\Leftrightarrow \\
(A \vee B) \Rightarrow (\neg A) &\Leftrightarrow \\
\neg(A \vee B) \vee (\neg A) &\Leftrightarrow \\
(\neg A \wedge \neg B) \vee \neg A &\Leftrightarrow \neg A
\end{aligned}$$

Wir schreiben im folgenden "1" für "wahr" und "0" für "falsch". Die kursiv gedruckten Zahlen zeigen an in welcher Reihenfolge die einzelnen Spalten der Wahrheitstabelle ausgefüllt wurden.

		1.	*5.*	*2.*	*4.*	*3.*
A	B	$(A \vee B)$	$\Rightarrow$	$((\neg A \vee B)$	$\wedge$	$(A \Rightarrow \neg A))$
0	0	0	**1**	1	1	1
0	1	1	**1**	1	1	1
1	0	1	**0**	0	0	0
1	1	1	**0**	1	0	0

Hinweis: Es wird 1 Punkt für $\neg A$ und 1 Punkt für die korrekte Wahrheitstabelle vergeben.

b) *Hinweis:* Fehler in der Auswertung der Wahrheitstabelle geben pro Spalte -0.5 Punkte Abzug, Folgefehler werden nicht geahndet.

		1.	*3.*	*2.*	*5.*	*4.*
A	B	$((A \wedge \neg B)$	$\vee$	$(A \Rightarrow B))$	$\Rightarrow$	$(B \Rightarrow A)$
0	0	0	1	1	**1**	1
0	1	0	1	1	**0**	0
1	0	1	1	0	**1**	1
1	1	0	1	1	**1**	1

c)

			1.	*5.*	*2.*	*4.*	*3.*
A	B	C	$(C \Rightarrow B)$	$\vee$	$((A \wedge \neg B)$	$\wedge$	$(C \wedge \neg B))$
0	0	0	1	**1**	0	0	0
0	0	1	0	**0**	0	0	1
0	1	0	1	**1**	0	0	0
0	1	1	1	**1**	0	0	0
1	0	0	1	**1**	1	0	0
1	0	1	0	**1**	1	1	1
1	1	0	1	**1**	0	0	0
1	1	1	1	**1**	0	0	0

Aufgabe 1.2 (4 Punkte)
Was kann man über die Surjektivität, Injektivität, Bijektivität folgender Abbildungen sagen? Begründen Sie jeweils kurz.

a) $f_1 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 : x \to \begin{cases} 42, & \text{wenn } x = 1 \text{ oder } x = 0, \\ x - 1, & \text{sonst} \end{cases}$

b) $f_2 : A_4 \to B_3$

c) $f_3 : A_4 \to B_4$

d) $f_4 : A_4 \to B_5$

A_4 enthält 4 Elemente. B_3, B_4, B_5 enthalten je nach Index 3, 4 oder 5 Elemente.

Lösung 1.2
Hinweis: pro falscher Aussage gibt's -0.5 Punkte Abzug

a) Die Abbildung ist weder injektiv ($f_1(0) = f_1(1) = 42$), noch surjektiv ($\nexists k \in \mathbb{N}_0 : f_1(k) = 0$) , folglich auch nicht bijektiv.

b) Die Abbildung ist nicht injektiv und nicht bijektiv. Die Abbildung kann surjektiv sein.

c) Die Abbildung kann entweder bijektiv sein oder weder injektiv noch surjektiv. Die Abbildung ist genau dann injektiv, wenn sie auch surjektiv ist. Injektivität ohne Surjektivität (bzw Surjektivität ohne Injektivität) kann insbesondere nicht auftreten.

d) Die Abbildung ist nicht surjektiv und nicht bijektiv. Die Abbildung kann injektiv sein.

Aufgabe 1.3 (2 Punkte)
Gilt für alle Mengen M, dass jede injektive Abbildung $f : M \to M$ auch surjektiv ist? Begründen oder widerlegen Sie.

Lösung 1.3
Nein, das gilt nicht für alle Mengen.
Gegenbeispiel: $M = \mathbb{N}_0$,
$f : n \to n + 1$

Aufgabe 1.4 (2+4 Punkte)

a) Wie viele unterschiedliche Verknüpfungen zweier Aussagen gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Gegeben ist folgende Aussagenverknüpfung $\heartsuit$, die durch folgende Wahrheitstabelle definiert ist:

A	**B**	**A♡B**
w	w	f
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Geben Sie jeweils Aussagen an, die äquivalent sind zu

1.) $\neg A$,

2.) $A \wedge B$,

3.) $A \vee B$ und

4.) $A \Rightarrow B$

, in denen aber ausschließlich $\heartsuit$ als Verknüpfung benutzt wird.

Lösung 1.4

a) Es gibt $2^{2^2} = 16$ verschiedene Verknüpfungen der Aussagen. Diese verschiede Verknüpfungen werden auch *Junktoren* genannt.

Bei 2 Aussagen, die jeweils 2 verschiedene Wahrheitswerte annehmen können, sind 2^2 Kombinationen von Wahrheitswerten möglich. Daraus erhält man 2^4 verschiedene Verknüpfungsmöglichkeiten für diese Kombinationen.

b) Die Verknüpfung $\heartsuit$ ist im allgemeinen als NOR-Funktion bekannt: $A \heartsuit B \Leftrightarrow \neg(A \vee B)$

1.) $A \heartsuit A$ oder auch $A \heartsuit 0$

2.) $(A \heartsuit A) \heartsuit (B \heartsuit B)$

3.) $(A \heartsuit B) \heartsuit (A \heartsuit B)$ oder auch $(A \heartsuit B) \heartsuit 0$

4.) $((A \heartsuit B) \heartsuit B) \heartsuit 0$

Hinweis: Es sind natürlich auch andere Verknüpfungen möglich

Aufgabe 1.5 (2 Punkte)

Der Planet Fantasia ist Ziel eines Betriebsausfluges von Menschen und Vulkaniern (Vulkanier sind den Menschen äußerlich recht ähnlich, unterscheiden sich jedoch durch ein spitz zulaufendes Ohr und nach oben gewölbten Augenbrauen).
Nach vielen durchzechten Stunden hat jeder einzelne vergessen ob er nun Vulkanier oder Mensch ist. Das Sehvermögen jedes einzelnen ist jedoch nicht beeinflusst, so dass alle anderen deutlich als Mensch oder Vulkanier erkennbar sind. Zum Abschluss des Ausfluges sollen sich nun alle für ein Gruppenfoto in einer Reihe aufstellen, auf der einen Seite die Menschen, auf der anderen Seite die Vulkanier. Das ganze soll absolut selbstorganisiert, ohne Hilfsmittel (Berühren der eigenen Ohren ist verboten) und ohne Anweisungen vonstatten gehen.
Geben Sie eine möglichst simple Strategie zum Aufstellen an, wobei jeder einzelne keine Information über die eigene Rasse benötigt.

Lösung 1.5
Die Ausflügler stellen sich sequentiell (also einer nach dem anderen)in der Reihe

auf, wobei sich jeder einzelne nach Möglichkeit zwischen einem Menschen und einem Vulkanier platziert. Sollte man dabei nur eine Rasse vor sich haben (so dass man sich nicht zwischen Mensch und Vulkanier stellen kann), stellt man sich an das äußere Ende der Reihe.