

Grundbegriffe der Informatik Musterlösung zu Aufgabenblatt 11

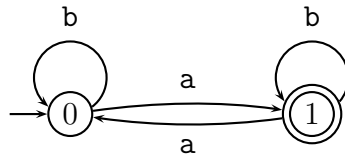
Aufgabe 11.1 (3+3+3+4 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Sprachen L_i jeweils einen Endlichen Akzeptor A_i , einen Regulären Ausdruck R_i und eine Rechtslineare Grammatik G_i an, so dass für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt: $L(A_i) = \langle R_i \rangle = L(G_i) = L_i$.

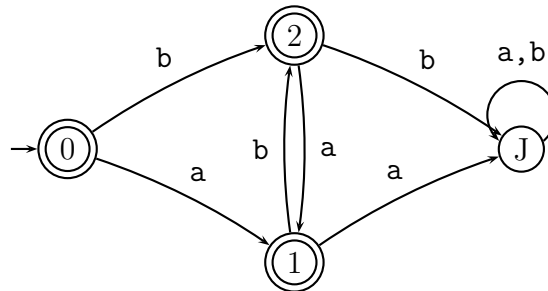
Hinweis: Benutzen Sie für Ihren Akzeptor jeweils möglichst wenig Zustände.

- $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid N_a(w) \bmod 2 = 1\}$.
- $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält weder das Teilwort } aa \text{ noch das Teilwort } bb\}$.
- $L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{Das vorletzte Zeichen in } w \text{ ist ein } a\}$.
- $L_4 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ hat gerade Länge und enthält das Teilwort } aa\}$.

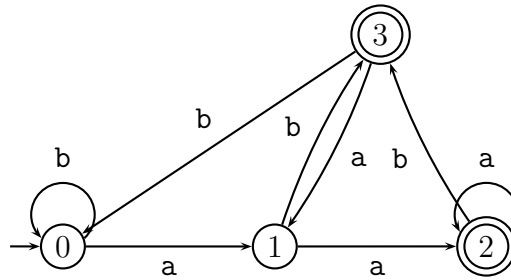
Lösung 11.1



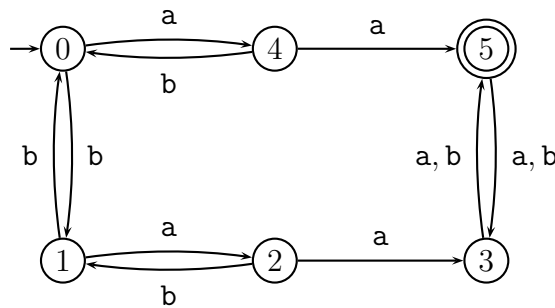
- Akzeptor:
 - regulärer Ausdruck: $b^*ab^*(ab^*ab^*)^*$
 - rechtslineare Grammatik: $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow bS \mid aA, A \rightarrow bA \mid \varepsilon \mid aS\})$



- Akzeptor:
 - regulärer Ausdruck: $\emptyset^* \mid (b|ab)(ab)^* \mid (a|ba)(ba)^*$
 - rechtslineare Grammatik: $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow \varepsilon \mid bB \mid aA, A \rightarrow bB \mid \varepsilon, B \rightarrow \varepsilon \mid aA\})$



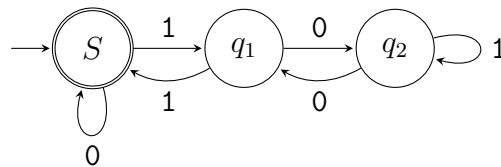
- c)
- Akzeptor:
 - regulärer Ausdruck: $(a|b)^*a(a|b)$
 - rechtslineare Grammatik: $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aS \mid bS \mid aA, A \rightarrow a \mid b\})$



- d)
- Akzeptor:
 - regulärer Ausdruck: $((a|b)(a|b))^* (aa \mid ((a|b)(aa)(a|b))) ((a|b)(a|b))^*$
 - rechtslineare Grammatik: $G = (\{S, A, A_2, B, B_1, B_2\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aA \mid bB, A \rightarrow aA_2 \mid bS, A_2 \rightarrow aB_2 \mid bB_2 \mid \varepsilon, B \rightarrow aB_1 \mid bS, B_1 \rightarrow aB_2 \mid bB, B_2 \rightarrow aA_2 \mid bA_2\})$

Aufgabe 11.2 (1+1 Punkte)

Geben Sie zu folgendem Endlichen Akzeptor A



- a) einen regulären Ausdruck R an, so dass $L(A) = \langle R \rangle$ und

- b) eine kurze, möglichst präzise Beschreibung für $L(A)$ in eigenen Worten an.
Hinweis: Interpretieren Sie dabei die Eingabe als Binärzahl.

Lösung 11.2

- a) $(0|1(01 * 0) * 1)^*$
 b) Der Akzeptor akzeptiert genau die durch 3 teilbaren Binärzahlen und ε .

Aufgabe 11.3 (1+4 Punkte)

Gegeben sei ein Endlicher Akzeptor $A = (Z, z_0, X, f, F)$, der die Sprache $L \subseteq X^*$ akzeptiert. Gesucht ist ein Endlicher Akzeptor A^c , für den gilt: $L(A^c) = L^c$, mit $L^c = \{w \mid w \in X^* \wedge w \notin L\}$.

- a) Geben Sie A^c an.
 b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion über die Wortlänge $|w|$, dass für Ihren Akzeptor A^c aus Teilaufgabe a) gilt: $L(A^c) = L^c$.

Lösung 11.3

- a) $A^c = (Z, z_0, X, f, Z \setminus F)$
 b) Wir müssen zeigen, dass jedes w , das A zu einem akzeptierenden Zustand führt, in A^c zu einem nicht akzeptierenden Zustand führt **und** jedes Wort w , das A zu einem nicht akzeptierenden Zustand führt, in A^c zu einem akzeptierenden Zustand führt.

- Wir betrachten $w \in L(A)$:

Induktionsanfang: $|w| = 0$: D.h. $w = \varepsilon$. Da $w \in L(A)$ heisst das, q_0 ist akzeptierender Zustand in A . Nach Konstruktion aus Teilaufgabe a) heisst das auch, dass q_0 kein akzeptierender Zustand in A^c ist. $\checkmark$

Induktionsvoraussetzung:

Für beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ mit $|w_n| = n$ gilt: $w_n \in L(A) \wedge w_n \notin L(A^c)$.

Induktionsschluss: Sei $w = w_n x$, mit $x \in X$. Da wir $w \in L(A)$ betrachten, führt $f^*(z_0, w) = f^*(z_0, w_n x) = f(f^*(z_0, w_n), x)$ in einen akzeptierenden Zustand von A und daher in einen nicht akzeptierenden Zustand in A^c .

- Wir betrachten $w \notin L(A)$:

Induktionsanfang: $|w| = 0$: D.h. $w = \varepsilon$. Da $w \notin L(A)$ heisst das, q_0 ist kein akzeptierender Zustand in A . Nach Konstruktion aus Teilaufgabe a) heisst das auch, dass q_0 akzeptierender Zustand in A^c ist. $\checkmark$

Induktionsvoraussetzung:

Für beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ mit $|w_n| = n$ gilt: $w_n \notin L(A) \wedge w_n \in L(A^c)$.

Induktionsschluss: Sei $w = w_n x$, mit $x \in X$. Da wir $w \notin L(A)$ betrachten, führt $f^*(z_0, w) = f^*(z_0, w_n x) = f(f^*(z_0, w_n), x)$ in einen nicht-akzeptierenden Zustand von A und daher in einen akzeptierenden Zustand in A^c .