Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 3

Aufgabe 3.1 (1+1+5 Punkte)

a) Gegeben ist ein Quadrat Q mit Seitenlänge l. Wie ändert sich die absolute Anzahl an (nicht überlappenden) Quadraten, wenn Q in vier kleinere nichtüberlappende Quadrate mit Seitenlänge $l/2$ aufgeteilt wird?

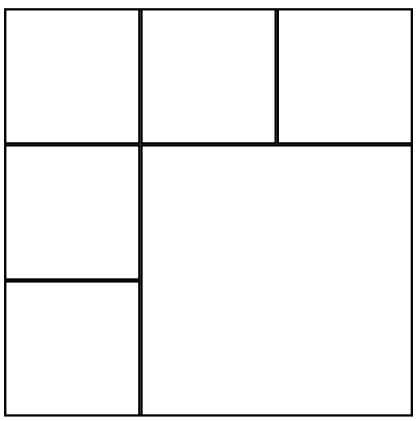
b) Zeichnen Sie die Teilung eines Quadrates Q in 6 kleinere Quadrate, so dass es keine Überlappung gibt und die gesamte Fläche von Q mit Quadraten gefüllt ist. Die kleineren Quadrate dürfen jeweils unterschiedliche Größe haben.

c) Benutzen Sie die vorherigen Teilaufgaben um per vollständiger Induktion zu zeigen, dass ein Quadrat Q in $n > 5$ Quadrate aufgeteilt werden kann, so dass es keine Überlappung gibt und die gesamte Fläche von Q mit den n Quadraten gefüllt ist.

   Hinweis: Sie können die Aussage benutzen, dass jede ganze Zahl $n > 5$ geschrieben werden kann in der Form $n = a + 3m$, mit $a \in \{6, 7, 8\}$ und $m \in \mathbb{N}_0$.

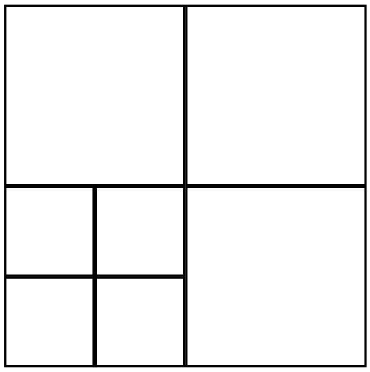
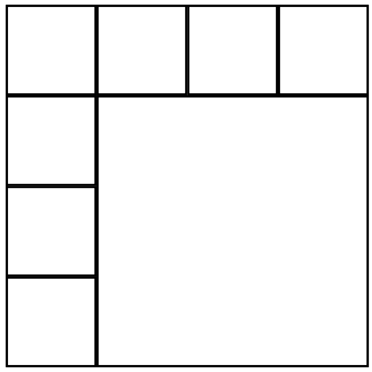
Lösung 3.1

a) Die Anzahl der Quadrate erhöht sich dadurch um 3.

b) 

c) **Induktionsanfang:** $n = 6, 7, 8$**:** s.o. die Aufteilung in 6 Quadrate.

7 bzw 8 Quadrate:

Induktionsvoraussetzung:
Für ein festes, aber beliebiges $n \geq 8,\ n \in \mathbb{N}_+$ gelte: Jedes Quadrat Q kann (so wie in der Aufgabe gefordert) in n, $n-1$ und $n-2$ Quadrate zerlegt werden.

Induktionsschluss: Wir wählen $n \geq 8$, so dass gilt $n-2 \geq 6$. Da $6 \leq n-2 \leq n$, gilt die Annahme für $n-2$. Das bedeutet wir können (nach IV) ein Quadrat in $n-2$ kleinere Quadrate aufteilen. Durch Teilaufgabe a) weiss man, dass man die Anzahl der Quadrate um 3 erhöhen kann, indem man ein Quadrat viertelt. Da $n+1 = n-2+3$ gilt, kann man $n-2$ Quadrate so aufteilen, um $n+1$ Quadrate zu erhalten.

Da die Aussage für Zerlegungen in 6,7 und 8 Quadrate gilt und zudem für alle $x,\ 5 < x \leq n$ für beliebiges n die Aussage für $n+1$ impliziert, gilt die Behauptung für alle $n \geq 6$.

Hinweis: Für den Induktionsanfang gibt es 2.5 Punkte (0.5 Punkte für $n = 6$, für $n = \{7, 8\}$ gibt es jeweils einen Punkt). Die IV gibt 1.5 Punkte, IS 1 Punkte. Wichtig ist, dass auch in der IV 3 Fälle abgedeckt sind.

Aufgabe 3.2 (2 Punkte)
Es sei A ein beliebiges Alphabet. Für alle $w \in A^*$ ist $N_x(w)$ die Anzahl der Vorkommen des Zeichens x im Wort w.
Geben Sie eine formale, rekursive Definition für die Funktion $N_x(w)$ an.

Lösung 3.2
$N_x(\epsilon) = 0$

$$\forall w \in A^* \forall y \in A : N_x(wy) = \begin{cases} N_x(w) + 1 & \text{falls } x = y \\ N_x(w) + 0 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

Aufgabe 3.3 (1+1 Punkte)
Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Die Sprache $L \subseteq A^*$ sei definiert durch $L = \{\mathtt{ab}\}^*\{\mathtt{aa}\}\{\mathtt{b}\}^*$. Welche der beiden Wörter w_a, w_b sind in der formalen Sprache L^* enthalten? Falls das zu überprüfende Wort $w \in \{w_a, w_b\}$ in L^* liegt, geben Sie eine Zerlegung in Wörter $w_1, \ldots, w_k$ aus L an, so dass $w = w_1 \cdots w_k$ gilt.

a) $w_a = \mathtt{aaabaaab}$
b) $w_b = \mathtt{aaaaabaabb}$

Lösung 3.3

a) $\mathtt{aaabaaab} \notin L^*$.

b) $\mathtt{aaaaabaabb} \in L^*$, da $\mathtt{aaaaabaabb} = (\mathtt{aa})(\mathtt{aa})(\mathtt{abaabb})$ und $\mathtt{aa} \in L$ und $\mathtt{abaabb} \in L$.

Aufgabe 3.4 (2+1+2+2 Punkte)
Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$. Die formalen Sprachen $L_1 \subseteq A^*$ und $L_2 \subseteq A^*$ sind wie folgt definiert:

$$L_1 = \{\epsilon\} \cup \{\mathtt{a}\} \cdot L_1 \cup \{\mathtt{b}\} \cdot L_1 \cup L_1 \cdot \{\mathtt{c}\}$$
$$L_2 = \{\epsilon\} \cup \{\mathtt{a}\} \cdot L_2 \cdot \{\mathtt{a}\} \cup \{\mathtt{b}\} \cdot L_2 \cdot \{\mathtt{b}\} \cup L_2 \cdot L_2$$

a) Entscheiden Sie, zu welcher(n) Sprache(n) die folgenden Wörter gehören:

   $w_1 = \mathtt{abbabb}$, $w_2 = \mathtt{abaccb}$, $w_3 = \mathtt{aabaa}$, $w_4 = \mathtt{baabaabb}$

b) Geben Sie die Anzahl der Wörter der Länge 4 an, die zur Sprache L_1 gehören.

c) Geben Sie alle Wörter der Länge 4 an, die zur Sprache L_2 gehören

d) Geben Sie in eigenen Worten eine möglichst einfache Beschreibung für die Sprachen L_1 und L_2 an.

Lösung 3.4

a)
- $w_1 \in L_1 \wedge w_1 \in L_2$
- $w_2 \notin L_1 \wedge w_2 \notin L_2$
- $w_3 \in L_1$
- $w_4 \in L_1 \wedge w_4 \in L_2$

b) Es gibt 31 Wörter der Länge 4 in L_1.
16 Wörter, die kein `c` enthalten, 8 Wörter, mit $\{\mathtt{a.b}\}^* \cdot \mathtt{c}$, 4 Wörter mit $\{\mathtt{a.b}\}^* \cdot \mathtt{cc}$, 2 Wörter mit $\{\mathtt{a.b}\}^* \cdot \mathtt{ccc}$ und $\mathtt{cccc}\}$

c) `aaaa`, `bbbb`, `aabb`, `bbaa`, `abba`, `baab`

Hinweis: Pro vergessenem Wort -0.5 Punkte

d) L_1 beinhaltet Wörter, die mit einer beliebigen Anzahl an `a`'s und `b`'s (in beliebiger Reihenfolge) beginnen, gefolgt von einer beliebigen Anzahl an `c`'s.

L_2 beinhaltet alle Konkatenationen von Palindromen gerader Länge.

Aufgabe 3.5 (3 Punkte)
Es sei $L \subseteq A^*$ eine formale Sprache. Beweisen oder widerlegen Sie:

$$L^+ \cdot L^+ \subseteq L^+$$

Lösung 3.5
$w \in L^+ \cdot L^+$ beliebig, aber fest gewählt.
$\Rightarrow \exists w_1 \in L^+ : \exists w_2 \in L^+ : w = w_1 w_2$
$\Rightarrow \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}_+ : \exists w_1 \in L^{n_1} : \exists w_2 \in L^{n_2} : w = w_1 w_2$
$\Rightarrow \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}_+ : w \in L^{n_1 + n_2}$
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_+ : w \in L^n$
$\Rightarrow w \in L^+$
Daraus folgt $L^+ \cdot L^+ \subseteq L^+$.
Hinweis: 1 Punkt für die richtige Annahme, 2 Punkte für den korrekten Beweis