Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 4

Aufgabe 4.1 (1+1 Punkte)
Gegeben sei folgendes Programmstück:
$x \leftarrow x + y$
$y \leftarrow x - y$
$x \leftarrow x - y$

a) Berechnen Sie einen Durchlauf mit der Anfangsbelegung $x = 3, y = 7$.

b) Was bewirkt das Programmstück?

Lösung 4.1

a)

	x	y
Anfangsbelegung:	3	7
Nach 1. Zeile	10	7
Nach 2. Zeile	10	3
Nach 3. Zeile	7	3

b) Die beiden Variablen x und y werden vertauscht.

Aufgabe 4.2 (4+2 Punkte)
Das Pendel einer badischen Kuckucksuhr macht p volle Pendelschläge (von links nach rechts nach links) an einem Tag. Bei jedem Pendelschlag dreht sich der Sekundenzeiger um 6 Grad im Uhrzeigersinn. Wenn der Sekundenzeiger eine volle Umdrehung (360 Grad) durchgeführt hat, bewegt sich der der Minutenzeiger um 6 Grad. Hat der Minutenzeiger eine volle Umdrehung durchgeführt, dreht sich der Stundenzeiger um 30 Grad.

a) Geben Sie in Pseudocode eine Schleife über die Pendelschläge eines Tages an, die die Bewegung der Zeiger simuliert. Verwenden Sie zur Beschreibung der Zeigerposition Variablen, welche die absoluten Winkel der Zeiger in Bezug zur "Null-Position" (das ist oben in der Mitte der Uhr) abbilden (α für Sekundenzeiger, β für Minutenzeiger und γ für Stundenzeiger) .

b) Bestimmen Sie eine Schleifeninvariante, die die absoluten Winkel der Zeiger beinhaltet.

Lösung 4.2

a) $\alpha \leftarrow 0$
$\beta \leftarrow 0$
$\gamma \leftarrow 0$
for $i \leftarrow 0$ **to** p **do**
  $\alpha \leftarrow 6i$ **mod** 360
  $\beta \leftarrow ((6i$ **div** $360)6)$ **mod** 360
  $\gamma \leftarrow 30(i$ **div** $3600)$ **mod** 360
od
Hinweis: Die Initialisierung der Variablen gibt einen Punkt (die braucht man auf jeden Fall für die Schleifeninvariante). Für die 3 Zuweisungen für α, β, γ innerhalb der Schleife, gibt es 0.5, 1 und 1.5 Punkte.

b) Es gilt immer zu Beginn und Ende eines Schleifendurchlaufes:

$$i \,\mathbf{mod}\, ((60)^2 \cdot 12) = \alpha \,\mathbf{div}\, 6 + \beta \,\mathbf{div}\, 6 \cdot 60 + (\gamma \,\mathbf{div}\, 30) \cdot 3600$$

Aufgabe 4.3 (2+1+4+1 Punkte)
A, B sind binäre Aussagevariablen $\in \{1, 0\}$. Wir definieren das exklusive Oder (XOR) $A \oplus B$ als Verknüpfung, die nur wahr wird, wenn genau eine der beiden Aussagevariablen wahr ist. Die XOR-Verknüpfung ist assoziativ.
Gegeben ist der folgende Algorithmus.

// Eingaben: $a \in \mathbb{N}_+, b \in \mathbb{N}_+$
$P \leftarrow 0$
$C \leftarrow 0$
$D \leftarrow 1$
while $(a > 0) \vee (b > 0) \vee (C > 0)$ **do**
  $X \leftarrow a$ **mod** 2
  $Y \leftarrow b$ **mod** 2
  if $X \oplus Y \oplus C = 1$ **then** $P \leftarrow P + D$
  $C \leftarrow (X \wedge Y) \vee (Y \wedge C) \vee (X \wedge C)$
  $D \leftarrow 2 \cdot D$
  $a \leftarrow a$ **div** 2
  $b \leftarrow b$ **div** 2
od
// Ausgabe: P

a) Machen Sie eine Beispielrechnung für den Fall $a = b = 2$. Geben Sie dabei tabellarisch die Werte der einzelnen Variablen $a_i, b_i, P_i, C_i, D_i, X_i, Y_i$ an, wobei der Index i der Variablen den i-ten while-Schleifen-Durchgang angibt.

b) Finden Sie eine Schleifeninvariante, die das Wesentliche dessen, was der Algorithmus macht, widerspiegelt.

c) Weisen Sie nach, dass Ihre Aussage tatsächlich Schleifeninvariante ist.

d) Was berechnet der Algorithmus?

Lösung 4.3

a)

	a	b	P	C	D	X	Y
Anfangsbelegung:	2	2	0	0	1		
Nach 1. Schleife	1	1	0	0	2	0	0
Nach 2. Schleife	0	0	0	1	4	1	1
Nach 3. Schleife	0	0	4	0	8	0	0

b) $\forall i \in \mathbb{N}_0 : (a_i + b_i + C_i) \cdot D_i + P_i = a + b$

c) **Induktionsanfang:** $i = 0$**:** Wir betrachten die Anfangsbelegungen $P \leftarrow 0, C \leftarrow 0, D \leftarrow 1$:
$(a_0 + b_0 + 0) \cdot 1 = a + b\surd$

Induktionsvoraussetzung:
Für beliebiges, aber festes $i \in \mathbb{N}_0$ gilt:
$(a_i + b_i + C_i) \cdot D_i + P_i = a + b$

Induktionsschluss: Wir zeigen, dass dann auch gilt: $(a_{i+1} + b_{i+1} + C_{i+1}) \cdot D_{i+1} + P_{i+1} = a + b$
Wir sehen, dass C_{i+1} 0 oder 1 zugewiesen bekommt. Genauer gesagt, wird $C_{i+1} = 1$, wenn mindestens 2 der Variablen X_{i+1}, Y_{i+1}, C_i den Wert 1 haben. Es gilt also folgendes:
$C_{i+1} = (X_{i+1} + Y_{i+1} + C_i) \,\mathbf{div}\, 2$.
Die Variable P wird zu $P + D$, wenn $X \oplus Y \oplus C = 1$ gilt, also wenn eine ungerade Anzahl der Variablen X, Y, C den Wert 1 besitzen. Daraus folgt folgende Gleichung:
$P_{i+1} = P_i + D_i((X_{i+1} + Y_{i+1} + C_i) \textbf{ mod } 2)$

Diese Beobachtungen werden im folgenden auch benutzt:

$$\begin{aligned}
& (a_{i+1} + b_{i+1} + C_{i+1}) \cdot D_{i+1} + P_{i+1} \\
= \quad & (a_i \,\mathbf{div}\, 2 + b_i \,\mathbf{div}\, 2 + (a_i \ \mathbf{mod}\ 2 + b_i \ \mathbf{mod}\ 2 + C_i) \,\mathbf{div}\, 2) \cdot 2D_i \\
& + P_i + D_i((a_i \ \mathbf{mod}\ 2 + b_i \ \mathbf{mod}\ 2 + C_i) \ \mathbf{mod}\ 2) \\
= \quad & (a_i \,\mathbf{div}\, 2 + b_i \,\mathbf{div}\, 2) 2D_i + P_i + D_i(a_i \ \mathbf{mod}\ 2 + b_i \ \mathbf{mod}\ 2 + C_i) \\
= \quad & (a_i + b_i + C_i) \cdot D_i + P_i
\end{aligned}$$

In den letzten beiden Umformungen wurde benutzt, dass gilt: $(n \,\mathbf{div}\, 2)2 + n \ \mathbf{mod}\ 2 = n$

Hinweis: Für IA und IV gibt es jeweils 0.5 Punkte IS gibt 3 Punkte.

d) Der Algorithmus berechnet die Summe $a + b$.

Aufgabe 4.4 (3 Punkte)
Auf einer Tafel stehen die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 10$. In einer Iteration darf man zwei Zahlen a und b wegwischen und die Zahl $a \cdot b + a + b$ hinschreiben. Welche Zahlen können nach 9 Iterationen auf der Tafel stehen?
Können Sie eine allgemeine Aussage/Formel angeben, wenn statt $1, 2, 3, \ldots, 10$ die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ an der Tafel stehen?

Lösung 4.4
Nach 9 Iterationen steht $39\,916\,799 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 11 - 1$ an der Tafel.
Wenn man jede der Zahlen um eins erhöht und diese wiederum multipliziert und davon 1 subtrahiert, erhält man dieses Ergebnis, da gilt:

$$(a + 1) \cdot (b + 1) = a \cdot b + a + b + 1$$

Für die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ steht folglich nach $n - 1$ Schritten $(\prod_{i=2}^{n+1} i) - 1$ an der Tafel.
Hinweis: 1 Punkt für die Antwort 39 916 799. 2 Punkte, wenn man das "Allgemeine" durchschaut.