

Grundbegriffe der Informatik Musterlösung zu Aufgabenblatt 5

Aufgabe 5.1 (1+1+2+2 Punkte)

Geben Sie jeweils eine kontextfreie Grammatik an, die folgende Sprachen über dem Alphabet $A = \{a, b\}$ produziert:

- a) $L_{<} = \{a^i b^j \mid 0 \leq i < j\}$
- b) $L_{>} = \{a^i b^j \mid i > j \geq 0\}$
- c) $L_1 = \{a, b\}^* ba \{a, b\}^*$
- d) $L_2 = \{a, b\}^* \setminus \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

Lösung 5.1

- a) $G_a = (\{S_{<}\}, \{a, b\}, S_{<}, P_{<})$, mit $P_{<} = \{S_{<} \rightarrow S_{<}b \mid aS_{<}b \mid b\}$
- b) $G_b = (\{S_{>}\}, \{a, b\}, S_{>}, P_{>})$, mit $P_{>} = \{S_{>} \rightarrow aS_{>} \mid aS_{>}b \mid a\}$
- c) $G_c = (\{S_1, A\}, \{a, b\}, S_1, P_1)$, mit

$$P_1 = \{ \begin{array}{l} S_1 \rightarrow aS_1 \mid bS_1 \mid baA , \\ A \rightarrow aA \mid bA \mid \varepsilon . \end{array} \}$$

- d) $G_d = (\{S_{<}, S_{>}, S_1, A, S_2\}, \{a, b\}, S_2, P_2)$, mit

$$P_2 = \{ \begin{array}{l} S_2 \rightarrow S_{<} \mid S_{>} \mid S_1 , \\ S_{<} \rightarrow S_{<}b \mid aS_{<}b \mid b , \\ S_{>} \rightarrow aS_{>} \mid aS_{>}b \mid a , \\ S_1 \rightarrow aS_1 \mid bS_1 \mid baA , \\ A \rightarrow aA \mid bA \mid \varepsilon . \end{array} \}$$

Aufgabe 5.2 (2+2+2 Punkte)

Gegeben sind zwei kontextfreie Grammatiken $G_1 = (N_1, T_1, S_1, P_1)$ und $G_2 = (N_2, T_2, S_2, P_2)$, wobei gilt: $N_1 \cap N_2 = \{\}$. Finden Sie kontextfreie Grammatiken für die gilt:

- a) $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$

- b) $L(G) = L(G_1)^*$
 c) $L(G) = L(G_1) \cdot L(G_2)$

Lösung 5.2

- a) Wir führen ein neues Startsymbol S ein (wobei gilt, dass $S \notin N_1 \cup N_2$) und die beiden Produktionen $S \rightarrow S_1$ und $S \rightarrow S_2$. Also: $G = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1, S \rightarrow S_2\})$
 b) $G = (N_1, T_1, S_1, P_1 \cup \{S_1 \rightarrow S_1S_1, S_1 \rightarrow \epsilon\})$
 c) Wir führen ein neues Startsymbol S ein (wobei gilt, dass $S \notin N_1 \cup N_2$) und die Produktion $S \rightarrow S_1S_2$. Also: $G = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1S_2\})$

Aufgabe 5.3 (2+2 Punkte)

Gegeben ist die kontextfreie Grammatik $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, S, P)$ mit der Produktionenmenge

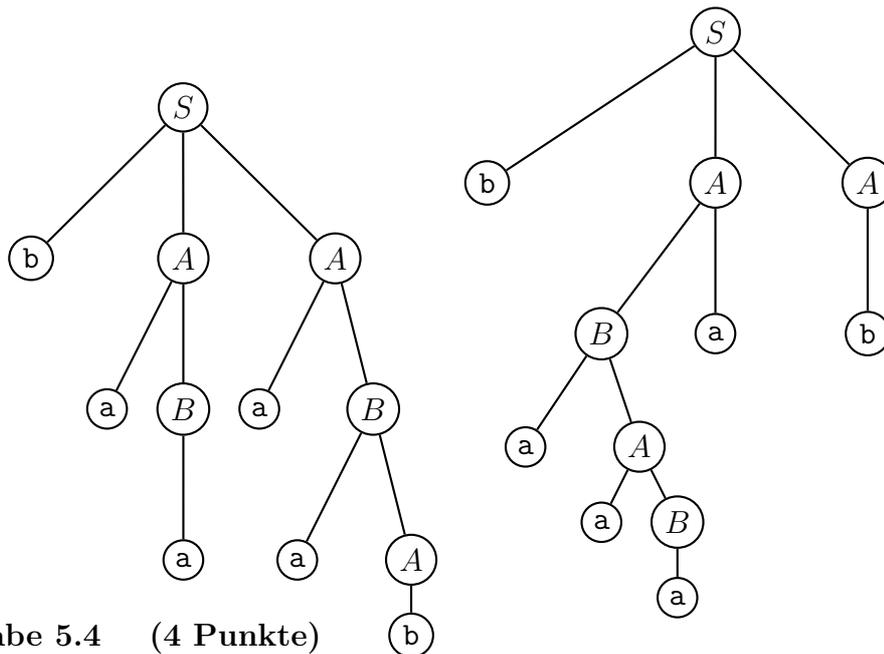
$$P = \{ \begin{array}{l} S \rightarrow bAA, \\ A \rightarrow aB \mid Ba \mid b, \\ B \rightarrow aA \mid a. \end{array} \}$$

- a) Geben Sie alle Wörter $w \in L(G)$ der Länge 5 an.
 b) Geben Sie zwei verschiedene Ableitungsbäume für $baaaab$ an.

Lösung 5.3

- a) $baabb, baaaa, babab, bbaba, bbaab$

Hinweis: Für jedes falsche/fehlende Wort gibt es -0.5 Punkte



b)

Aufgabe 5.4 (4 Punkte)

Gegeben ist die kontextfreie Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, S, \{S \rightarrow aaSb, S \rightarrow aaSc, S \rightarrow \varepsilon\})$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall w \in \{b, c\}^n : S \Rightarrow^n a^{2n} S w$$

Lösung 5.4

Induktionsanfang: $i = 0$: $\{b, c\}^0$ enthält nur ε
 $S \Rightarrow^0 a^0 S \varepsilon \checkmark$

Induktionsvoraussetzung:
 Für beliebiges, aber festes $i \in \mathbb{N}_0$ gilt:
 $\forall w \in \{b, c\}^i : S \Rightarrow^i a^{2i} S w$

Induktionsschluss: Wir zeigen, dass dann auch gilt: $S \Rightarrow^{i+1} a^{2(i+1)} S w'$
 $w' \in \{b, c\}^{i+1}$ Also $w' = xw$, mit $x \in \{b, c\}$

Wir unterscheiden also 2 Fälle:

- 1.) $x = b$: $S \stackrel{\text{Ind.vor.}}{\Rightarrow^i} a^{2i} S w \Rightarrow a^{2i} aaSbw = a^{2i+2} S w'$, also $S \Rightarrow^{i+1} a^{2(i+1)} S w'$, wobei $w' = bw$.
- 2.) $x = c$: $S \stackrel{\text{Ind.vor.}}{\Rightarrow^i} a^{2i} S w \Rightarrow a^{2i} aaScw = a^{2i+2} S w'$, also $S \Rightarrow^{i+1} a^{2(i+1)} S w'$, wobei $w' = cw$.

Hinweis: 1 Punkt für IA, 1 Punkt für IV, 2 Punkte für IS