Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 7

Aufgabe 7.1 (4 Punkte)

Beweisen Sie: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist ein Baum $\iff$ $(|V| = |E| + 1$ und G hat keine Zyklen).

Lösung 7.1

Zum Beweis benutzen wir vollständige Induktion über die Anzahl der Knoten.

Induktionsanfang: $n = 1$: Die Aussage stimmt für einen Graphen mit einem Knoten (und keinen Kanten). Er ist ein Baum und $|V| = |E| + 1 = 0 + 1 = 1$ ✓

Induktionsvoraussetzung:
Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_+$ gilt:
$G = (V, E)$ ist ein Baum $\iff$ $(n = |V| = |E| + 1$ und G hat keine Zyklen)

Induktionsschluss: Wir zeigen, dass die Annahme dann auch für $n + 1$ Knoten gilt: Angenommen wir haben einen beliebigen Baum mit $n + 1$ Knoten. Sei b ein Blatt dieses Baumes. Wenn wir b und die Kante $\{b, x\}$, die b mit dem restlichen Baum verbindet entfernen, haben wir einen Baum mit n Knoten, für den die IV gilt. Wenn wir also b und die Kante $\{b, x\}$ wieder hinzufügen, gilt die Annahme auch für $n + 1$, da sich die Anzahl der Knoten und die Anzahl der Kanten um 1 erhöht hat.

Angenommen wir haben einen beliebigen zyklenfreien Graphen mit $n + 1$ Knoten und n Kanten. Wir entfernen nun einen Knoten v und die Kante $\{v, x\}, (v \neq x)$, die existieren muss, da der Graf zyklenfrei ist. Nach IV ist der dadurch entstandene Graph mit n Knoten ein Baum, so dass durch das Hinzufügen von v die Baumeigenschaften erhalten bleiben.

Hinweis: IA 1 Punkt, IV 0.5 Punkte, IS 2.5 Punkte

Aufgabe 7.2 (3+4 Punkte)

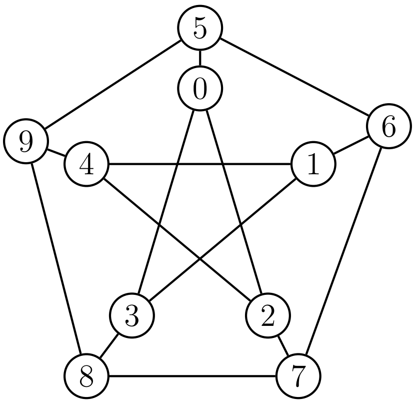
Ein Kreis ist ein wiederholungsfreier, geschlossener Weg.

a) Zeichen Sie einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit 10 Knoten, so dass jeder Knoten genau Grad 3 und der kürzeste Kreis (der Länge $\neq 0$) die Länge 5 hat.

b) Für den ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ gilt: $\forall x \in V : d(x) \geq a$ und der kürzeste Kreis (der Länge $\neq 0$) hat Länge 5.

   Beweisen Sie, dass G mindestens $a^2 + 1$ Knoten besitzt.

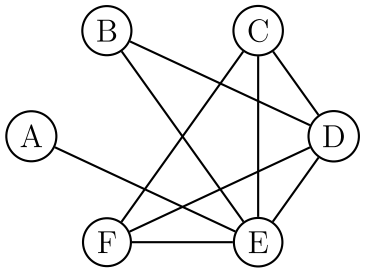
Lösung 7.2

a) 

b) Wir wählen einen beliebigen Knoten $x_0 \in V$. Nach Definition des Knotengrades (bzw da $\forall x \in V : d(x) \geq a$) gibt es mindestens a zu x adjazente Knoten: $x_1, x_2, \ldots, x_a$. Da es keine Kreise mit Länge < 5 gibt, wissen wir, dass es keine Kante zwischen 2 Knoten aus $x_1, x_2, \ldots, x_a$ gibt. Jeder dieser adjazenten Knoten $x_1, x_2, \ldots, x_a$ hat wiederum $a-1$ andere adjazente Knoten, die keine Kante mit den "bisher betrachteten Knoten" haben (sonst gäbe es einen Kreis der Länge 4).
Daraus folgt, dass G mindestens $1 + a + a \cdot (a-1) = a^2 + 1$ Knoten hat.

Aufgabe 7.3 (3 Punkte)
An einer Weihnachtsfeier nehmen 6 Personen (A,B,C,D,E,F) teil. A kennt dabei eine andere Person, B kennt zwei, C drei, D vier und E fünf andere Personen. Wie viele andere Personen auf der Feier kennt F? Zeichnen Sie einen Graphen, der die Situation verdeutlicht.
Hinweis: "sich kennen" ist eine symmetrische Relation.

Lösung 7.3
F kennt genau 3 andere Personen auf der Feier.



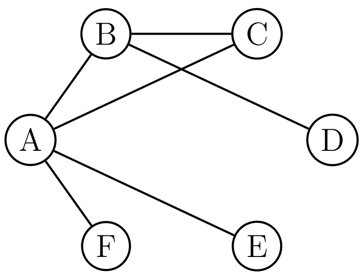
Hinweis: 2 Punkte für den korrekten Graphen, 1 Punkt für die Aussage, dass F 3 Personen kennt.

Aufgabe 7.4 (3 Punkte)
Zeichnen Sie, wenn möglich, einen ungerichteten schlingenfreien Graphen $G = (V, E)$ mit jeweils folgenden Eigenschaften. Begründen Sie kurz, wenn es keinen solchen Graphen gibt.

a) $V = \{A, B, C, D, E, F\}$, $d(A) = 4$, $d(B) = 3$, $d(C) = 2$, $d(D) = 1$, $d(E) = 1$, $d(F) = 1$

b) $V = \{A, B, C, D, E\}$, $d(A) = 4$, $d(B) = 3$, $d(C) = 2$, $d(D) = 1$, $d(E) = 1$

Lösung 7.4



a)

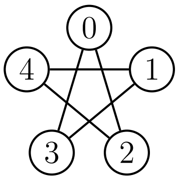
b) So einen Graphen gibt es nicht. Da jede Kante zwischen 2 Knoten verläuft, muss die Summe über alle Knotengrade eine gerade Zahl ergeben. Die Summe der angegebenen Knoten ist jedoch $4 + 3 + 2 + 1 + 1 = 11$, also ungerade.

Hinweis: Pro Teilaufgabe gibt es 1.5 Punkte. Bei b) gibt es 0.5 Punkte für das Erkennen, dass kein solcher Graph existiert und 1 Punkt für eine ordentliche Begründung

Aufgabe 7.5 (3 Punkte)

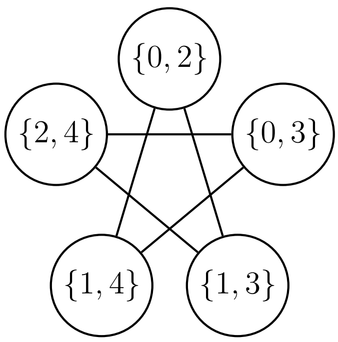
Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. Der Graph G' sei definiert durch $G' = (E, T)$, mit $\{\{a, b\}, \{c, d\}\} \in T \iff |\{a, b\} \cap \{c, d\}| = 0$

Zeichen Sie G' zu dem gegebenen Graphen G:



G

Lösung 7.5



G'