**Grundbegriffe der Informatik**
**Musterlösung zu Aufgabenblatt 9**

## Aufgabe 9.1 (2+2+2+2+2 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie:

a) $\frac{n^3+2n}{2n+1} \in O(n^2)$

b) $5^n \in O(3^n)$

c) $n^5(\log_2 n)^2 \in \Theta(2^{5\log_2 n + \log_2 \log_2 n} \log_2(n^5))$

d) Für alle Funktionen $f(n) > 0$, $g(n) > 0$ gilt:
$f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow (f(n) + g(n)) \in \Theta(g(n))$

e) Für alle Funktionen $f(n) > 0$, $g(n) > 0$, $p(n) > 0$, $q(n) > 0$ gilt:
$f(n) \in O(p(n)) \wedge g(n) \in O(q(n)) \Rightarrow (f(n))^{g(n)} \in O((p(n))^{q(n)})$

## Lösung 9.1

a) Zu zeigen: $\frac{n^3+2n}{2n+1} \in O(n^2)$:
$\frac{n^3+2n}{2n+1} \le \frac{n^3+2n}{2n} = \frac{1}{2}n^2 + 1 \le \frac{1}{2}n^2 + n^2 = \frac{3}{2}n^2$
Das heisst für $c = \frac{3}{2}$ und $n_0 = 42$ gilt: $\forall n \ge n_0 : \frac{n^3+2n}{2n+1} \le cn^2$

b) $5^n \in O(3^n)$:
Angenommen $5^n \in O(3^n)$, dann existieren $c > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}_0$, so dass $5^n \le c \cdot 3^n, \forall n \ge n_0$

$$
\begin{aligned}
5^n &\le c \cdot 3^n \\
\iff \log_3(5^n) &\le \log_3 c + \log_3(3^n) \\
\iff \log_3((\frac{5}{3})^n) &\le \log_3 c \\
\iff n \cdot \log_3(\frac{5}{3}) &\le \log_3 c \\
\iff n &\le \frac{\log_3 c}{\log_3(\frac{5}{3})} \\
\iff n &\le \log_{\frac{5}{3}} c
\end{aligned}
$$

Dies kann allerdings für $n > \log_{\frac{5}{3}} c$ nicht erfüllt sein. Somit gilt $5^n \notin O(3^n)$.

c) Die Behauptung stimmt.

Zu zeigen: $n^5(\log_2 n)^2 \in \Theta(2^{5\log_2 n + \log_2\log_2 n}\log_2(n^5))$ :

$2^{5\log_2 n+\log_2\log_2 n}\log_2(n^5) = 2^{5\log_2 n} \cdot 2^{\log_2\log_2 n} \cdot \log_2(n^5)$

$= (2^{\log_2 n})^5 \cdot \log_2 n \cdot 5\log_2 n$

$= n^5 \cdot \log_2 n \cdot 5\log_2 n = n^5 \cdot 5(\log_2 n)^2$

$\Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{n^5(\log_2 n)^2}{2^{5\log_2 n+\log_2\log_2 n}\log_2(n^5)} \leq \frac{1}{5}$

Da der Quotient der beiden Funktionen durch eine Konstante beschränkt wird, gilt: $n^5(\log_2 n)^2 \in \Theta(2^{5\log_2 n+\log_2\log_2 n}\log_2(n^5))$

d) Die Behauptung stimmt.

Wir nehmen an $f(n) \in O(g(n))$: d.h. nach Definition $\exists c > 0 \land \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)$

Addieren von $g(n)$ auf beiden Seiten, führt zu: $f(n) + g(n) \leq c \cdot g(n) + g(n) = (c+1) \cdot g(n)$.

Da zudem $f(n), g(n) > 0$ folgt daraus:
$0 \leq g(n) \leq f(n)+g(n) \leq (c+1)\cdot g(n), \forall n \geq n_0$, was bedeutet, dass $f(n)+g(n) \in \Theta(g(n))$.

e) Gegenbeispiel: $f(n) = p(n) = 2$, $g(n) = 2n$, $q(n) = n$

Dann gilt zwar $f(n) \in O(p(n)) \land g(n) \in O(q(n))$, jedoch $(f(n))^{g(n)} = 2^{2n} = 4^n \notin O((p(n))^{q(n)}) = O(2^n)$, für $c > 0$, mit $n > \log_2 c, 4^n > c \cdot 2^n$

**Aufgabe 9.2 (3+3 Punkte)**
Überprüfen Sie folgende Relationen $R_1$ und $R_2$ auf alle Eigenschaften einer Äquivalenzrelation:

a) $m, n \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : mR_1n \iff \exists k \in \mathbb{R}, k > 0 : \frac{m}{n} = k$

b) $m, n \in \mathbb{R} : mR_2n \iff \frac{m}{2} < n$

**Lösung 9.2**

a)
- **Reflexivität**: $R_1$ ist reflexiv. Für beliebiges $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt: $\frac{m}{m} = k$, mit $k = 1$.
- **Symmetrie**: $R_1$ ist symmetrisch. Für beliebige $m, n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gelte: $mR_1n$, also$\frac{m}{n} = k$, mit $k > 0$. Da gilt: $k > 0 \land m, n \neq 0 \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{1}{k}$. Da $\frac{1}{k} > 0$ gilt also auch $nR_1m$.

- **Transitivität**: $R_1$ ist transitiv. Für beliebige $m, n, p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gelte: $mR_1n \wedge nR_1p$, also $\frac{m}{n} = k \wedge \frac{n}{p} = j$, mit $k, j > 0$.
  Da gilt: $\frac{m}{p} = \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{p} = k \cdot j$ und $k \cdot j > 0$ gilt auch $mR_1p$.

$\Rightarrow R_1$ ist daher eine Äquivalenzrelation.

b)
- **Reflexivität**: $R_2$ ist nicht reflexiv. Gegenbeispiel: $m = -2 : \frac{-2}{2} = -1 \not< -2$.
- **Symmetrie**: $R_2$ ist nicht symmetrisch. Gegenbeispiel: $m = 1, n = 2 : \frac{1}{2} < 2 \Rightarrow mR_2n$, aber $\frac{2}{1} \not< 1$.
- **Transitivität**: $R_2$ ist nicht transitiv. Gegenbeispiel: $m = 4, n = 3, p = 2 : \frac{4}{3} < 3 \Rightarrow mR_2n$, $\frac{3}{2} < 2 \Rightarrow nR_2p$, aber $\frac{4}{2} \not< 2$.

$\Rightarrow R_2$ ist daher keine Äquivalenzrelation.

**Aufgabe 9.3 (2 Punkte)**
Es sei $a$ ein Array der Länge $n$.
Gegeben sei folgender Algorithmus:

```
x ← 0
for i ← 0 to n − 1 do
    for j ← i to n − 1 do
        x ← x + a[j]
    od
    for k ← 1 to n^2 do
        x ← x + k ∗ a[i]
    od
od
```

Schätzen Sie die Laufzeit möglichst passend im O-Kalkül ab. Begründen Sie dabei Ihre Abschätzung auf Basis der einzelnen Zeilen des Algorithmus.

**Lösung 9.3**

Folgendes sind die Abschätzungen der jeweiligen Zeile:

$$\begin{aligned}
x \leftarrow 0: &\quad 1\\
\textbf{for } i \leftarrow 0 \textbf{ to } n-1 \textbf{ do }: &\quad n\\
\textbf{for } j \leftarrow i \textbf{ to } n-1 \textbf{ do }: &\quad n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 = 0,5 \cdot n \cdot (n+1)\\
x \leftarrow x + a[j]: &\quad n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 = 0,5 \cdot n \cdot (n+1)\\
\textbf{for } k \leftarrow 1 \textbf{ to } n^2 \textbf{ do }: &\quad n^2 + n^2 + \ldots + n^2 + n^2 = n^3\\
x \leftarrow x + k * a[i]: &\quad n^2 + n^2 + \ldots + n^2 + n^2 = n^3
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Laufzeit liegt in $O(n^3)$.
*Hinweis:* Auf dem zuerst verfügbaren fehlerhaften Übungsblatt lief die zweite for-Schleife bis $n-i$. Fehler, die auf Annahmen darauf basieren, werden nicht geahndet