Klausur zur Vorlesung Grundbegriffe der Informatik 5. März 2012

Klausur-nummer			

Name:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	12	13	9	9	5	9	10
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:		Note:

Aufgabe 1 (12 Punkte)
Kreuzen Sie für die folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Wenn Sie kein Kreuz setzen, bekommen Sie weder Plus- noch Minuspunkt, für das Ankreuzen beider Möglichkeiten wird ein Punkt abgezogen. Die gesamte Aufgabe wird mit mindestens 0 Punkten bewertet.

a) Eine Menge M ist unendlich, wenn es eine injektive Abbildung von M in eine echte Teilmenge von M gibt.

wahr: ☐ falsch: ☐

b) Wenn eine Relation nicht symmetrisch ist, ist sie antisymmetrisch.

wahr: ☐ falsch: ☐

c) Sei R eine beliebige Relation auf einer nicht-leeren Menge M.
R ist transitiv $\Rightarrow R \circ R \subseteq R$.

wahr: ☐ falsch: ☐

d) Sei R eine beliebige Relation auf einer nicht-leeren Menge M.
$R \circ R \subseteq R \Rightarrow R$ ist transitiv.

wahr: ☐ falsch: ☐

e) Das leere Wort ϵ ist eine surjektive Abbildung: $\{\} \rightarrow \{\}$.

wahr: ☐ falsch: ☐

f) Seien L_1 und L_2 formale Sprachen. $L_1^* = L_2^* \Rightarrow L_1 = L_2$.

wahr: ☐ falsch: ☐

g) $\sqrt{n} \in O(2^{\sqrt{\log_2(n)}})$

wahr: ☐ falsch: ☐

h) $\sqrt{n} \in \Theta(2^{\sqrt{\log_2(n)}})$

wahr: ☐ falsch: ☐

i) $\sqrt{n} \in \Omega(2^{\sqrt{\log_2(n)}})$

wahr: ☐ falsch: ☐

j) Gegeben seien zwei reguläre Ausdrücke $R_1 = \varnothing$`* | 0(0|1)* | (0|1)*00(0|1)*` und $R_2 =$ `((0*1)*01*)*`
Es gilt: $\langle R_1 \rangle = \langle R_2 \rangle$.

wahr: ☐ falsch: ☐

k) Die Funktion $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ gibt als Funktionswert die größte Primzahl p zurück, für die gilt: $\exists k \in \mathbb{N}_+ : n = k \cdot p$
Es gilt $f(n) \in O(\sqrt{n})$.

wahr: ☐ falsch: ☐

l) Die aussagenlogische Formel $(A \Rightarrow \neg B) \vee ((B \wedge \neg C) \wedge (C \vee D)) \vee A$ ist äquivalent zu $A \vee \neg A$

wahr: ☐ falsch: ☐

Aufgabe 2 (13 Punkte)

1. Über dem Alphabet $A = \{a\}$ sei die formale Sprache $L = \{\mathtt{a}^2, \mathtt{a}^5\}^*$ gegeben.

   a) Geben Sie explizit an, welche Wörter nicht in L sind. [*1 Punkt*]

   b) Geben Sie eine formale Definition der Äquivalenzrelation von Nerode an. [*2 Punkte*]

   c) Geben Sie zu jeder Äquivalenklasse der durch L induzierten Äquivalenzrelation von Nerode $\equiv_L$ einen Repräsentanten und einen regulären Ausdruck an. [*3 Punkte*]

2. Gegeben seien drei nicht-leere Mengen A, B, C und zwei Abbildungen $f : A \to C$ und $g : B \to C$.

   Weiter sei gegeben $D = \{(a, b) \,|\, a \in A,\ b \in B \text{ und } f(a) = g(b)\}$ und
   $h : D \to A$, mit $h(a, b) = a$ und
   $k : D \to B$, mit $k(a, b) = b$.

   a) Zeigen Sie: $f \circ h = g \circ k$. [*2 Punkte*]

   b) Seien $A = B = C = \mathbb{Z}$, $f(n) = 2 \cdot n$ und $g(n) = n^2$.
   Geben Sie D an, in Abhängigkeit von nur einer Variablen. [*2 Punkte*]

3. Wie viele Äquivalenzrelationen gibt es auf einer drei-elementigen Menge? Geben Sie zu jeder Äquivalenzrelation die Äquivalenzklassen an. [*3Punkte*]

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 2:

Aufgabe 3 (9 Punkte)
Gegeben sei folgende Funktion $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$:

$f(0,0) = 0$
$f(x,y) = \min\{z, z \in \mathbb{N}_0 \mid \forall x' < x : z \neq f(x',y) \text{ und } \forall y' < y : z \neq f(x,y')\}$

Hinweis: Dabei ist mit $\min\{M\}$ das kleinste Element der Menge M gemeint.

a) Berechnen Sie $\forall x, y \in \mathbb{G}_5 : f(x,y)$. Verwenden Sie dazu folgende Tabelle:

[*3 Punkte*]

f(x,y)	**y=0**	**y=1**	**y=2**	**y=3**	**y=4**
x=0					
x=1					
x=2					
x=3					
x=4					

b) Zeigen Sie per Induktion über $n = x + y$: [*6 Punkte*]
$\forall x, y \in \mathbb{N}_0$:

- Für $x \neq y$ ist $f(x,y) \neq 0$ und
- für $x = y$ ist $f(x,y) = 0$.

Hinweis: Sie können annehmen, dass $\forall x, y \in \mathbb{N}_0 : f(x,y) = f(y,x)$

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 3:

Aufgabe 4 (9 Punkte)

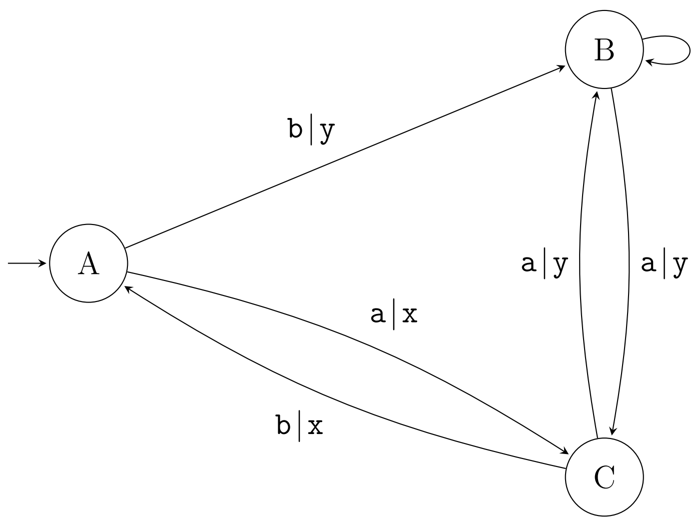
1. Geben Sie zu folgenden regulären Ausdrücken R_i, $i \in \{1, 2\}$ jeweils einen endlichen Akzeptor A_i (wie in der Vorlesung definiert) an, so dass $L(A_i) = \langle R_i \rangle$.

   a) $R_1 =$ `(aa)*b(aaa)*` [*2 Punkte*]

   b) $R_2 =$ `(a|ba)*(b|ab)+` [*4 Punkte*]

   Hinweis: Für einen beliebigen regulären Ausdruck R ist R`+` die Abkürzung von RR`*`.

2. Geben Sie zu folgendem Mealy-Automaten $M = (Z_m, A, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, f_m, \{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}, g_m)$ einen Moore-Automaten $N = (Z_n, A, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, f_n, \{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}, g_n)$ an, so dass für alle $w \in \{a, b\}^+$ gilt: $g_m^{**}(A, w) = g_n^{**}(A, w)$. [*3 Punkte*]



Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 4:

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Gegeben sei folgende formale Sprache
$L = \{(\mathtt{ab})^k \mathtt{c}^m \mathtt{d}^l \mid k, m, l > 0 \text{ und } (k = m \text{ oder } k = l)\}$

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (N, T, S, P)$ an, für die gilt: $L(G) = L$ *[3 Punkte]*

b) Geben Sie alle Wörter der Länge 7 an, die in L liegen. *[2 Punkte]*

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 5:

Aufgabe 6 (9 Punkte)

1. Zeichnen Sie alle gerichteten nicht-isomorphen Graphen, zu denen folgende Matrix E die Wegematrix ist. *[2 Punkte]*

   $$E : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$. Weiter sei definiert: $G' = (V, E')$, mit $E' = \{\{u, v\} \mid u \in V, v \in V, u \neq v \text{ und } \{u, v\} \notin E\}$.

   Beweisen Sie: Wenn $|V| \geq 5$ und $G = (V, E)$ ein Baum ist, dann sind G und G' nicht isomorph. *[3 Punkte]*

3. Gegeben sei die Menge $M = \{2, 6, 7, 10, 14, 21, 30, 70\}$ und die Relation $R \subseteq M \times M$ für $a, b \in M$:

   $bRa \iff a \bmod b = 0 \qquad$ das heißt $\qquad bRa \iff \exists k \in \mathbb{N}_0 : a = k \cdot b$

   a) Zeichnen Sie für die Relation bRa mit $a, b \in M$ das Hasse-Diagramm. *[2 Punkte]*

   b) Geben Sie alle minimalen, maximalen, größten und kleinsten Elemente im Hasse-Diagramm aus Teilaufgabe a) an. *[2 Punkte]*

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 6:

Aufgabe 7 (10 Punkte)
Die in dieser Aufgabe behandelten Turingmaschinen werden benutzt für Bandbeschriftungen, bei denen auf dem Band (von Blanksymbolen umgeben) ein Wort $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ steht.

Der Kopf der Turingmaschine stehe zu Beginn auf dem ersten Symbol von $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ (sofern w nicht das leere Wort ist).

1. Gegeben sei die folgende Turingmaschine T:

   - Zustandsmenge ist $Z = \{S, z_0, z_1, B\}$.
   - Anfangszustand ist S.
   - Bandalphabet ist $X = \{\Box, \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{\#}\}$.
   - Die Arbeitsweise ist wie folgt festgelegt:

	S	z_0	z_1	B
$\mathtt{a}$	$(z_0, \mathtt{\#}, 1)$	$(z_0, \mathtt{a}, 1)$	$(B, \mathtt{\#}, -1)$	$(B, \mathtt{a}, -1)$
$\mathtt{b}$	$(z_1, \mathtt{\#}, 1)$	$(B, \mathtt{\#}, -1)$	$(z_1, \mathtt{b}, 1)$	$(B, \mathtt{b}, -1)$
$\mathtt{\#}$	$(S, \mathtt{\#}, 1)$	$(z_0, \mathtt{\#}, 1)$	$(z_1, \mathtt{\#}, 1)$	$(B, \mathtt{\#}, -1)$
$\Box$	-	-	-	$(S, \Box, 1)$

   Sei $\mathcal{L}$ die Menge aller Wörter $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$, für die gilt: T hält bei Eingabe von w im Zustand S.

   a) Geben Sie für die Eingaben `baab` und `aba` jeweils die Anfangskonfiguration, die Endkonfiguration und jede weitere Konfiguration an, die sich während der Berechnung nach einer Änderung der Bandbeschriftung ergibt. *[3 Punkte]*

   b) Geben Sie eine formale Beschreibung von $\mathcal{L}$ an, die nicht auf T verweist. *[2 Punkte]*

2. Konstruieren Sie eine Turingmaschine, die für die Eingabe w die Funktion $f : \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \to \mathbb{G}_3,\ f(w) = N_b(w) \bmod 3$ berechnet und das Ergebnis (nur von Blanksymbolen umgeben) an beliebiger Stelle auf das Band schreibt.

   Die Laufzeit der Turingmaschine soll durch $O(n)$ beschränkt sein und die Turingmaschine soll höchstens 6 Zustände enthalten. Es ist möglich mit weniger Zuständen auszukommen. *[5 Punkte]*

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 7:

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 7:

Schmierpapier

Schmierpapier

Schmierpapier