Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
18. September 2012

Klausur-nummer

Name:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	10	10	6	10	4	11	9
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:	Note:

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Kreuzen Sie für die folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Wenn Sie kein Kreuz setzen, bekommen Sie weder Plus- noch Minuspunkt, für das Ankreuzen beider Möglichkeiten wird ein Punkt abgezogen. Die gesamte Aufgabe wird mit mindestens 0 Punkten bewertet.

a) Auf einer Menge M mit 3 Elementen gibt es 512 verschiedene Relationen $R \subseteq M \times M$.

wahr: ☐ falsch: ☐

b) Mindestens die Hälfte aller Relationen auf einer nichtleeren Menge M sind Funktionen.

wahr: ☐ falsch: ☐

c) Der Homomorphismus $c : \{a, b, c\}^* \to \{0, 1\}^*$, mit

$$c : \begin{cases} a \to 0, \\ b \to 01, \\ c \to 011 \end{cases}$$

ist injektiv.

wahr: ☐ falsch: ☐

d) Wenn (a, b) und (a, c) zu einer Halbordnung gehören, dann auch (b, c).

wahr: ☐ falsch: ☐

e) Die Sprache $L = \{a^r b^s c^t \mid (r + s + t) \bmod 2 \equiv 0\}$ ist regulär.

wahr: ☐ falsch: ☐

f) Für alle nichtleeren Mengen A, B gilt: $A \times B = B \times A$

wahr: ☐ falsch: ☐

g) $(\forall n \in \mathbb{N}_+ : f(n) < g(n)) \Rightarrow f(n) \notin O(g(n))$

wahr: ☐ falsch: ☐

h) $f \in O(g) \wedge u \in O(v) \Rightarrow \frac{f}{u} \in O(\frac{g}{v})$

wahr: ☐ falsch: ☐

i) Die Grammatik $G = (\{S\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S, \{S \to \mathtt{a}S\mathtt{b} \mid \mathtt{b}S\mathtt{a} \mid \epsilon\})$ erzeugt alle Wörter w über $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ mit $N_{\mathtt{a}}(w) = N_{\mathtt{b}}(w)$.

wahr: ☐ falsch: ☐

j) $<\subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0,\ >\subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.
$x(< \circ >)y \Leftrightarrow x < y + x + 1$

wahr: ☐ falsch: ☐

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 1:

Aufgabe 2 (10 Punkte)
In dieser Aufgabe geht es um Relationen. Für $n \in \mathbb{N}_+$ gelte wie in der Vorlesung: $\mathbb{G}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$

1. a) Geben Sie (graphisch) eine Relation $R_a \subseteq \mathbb{G}_4 \times \mathbb{G}_2$ an, so dass R_a rechtstotal und rechtseindeutig, aber nicht linkstotal und nicht linkseindeutig ist. [*2 Punkte*]

   b) Wie viele solcher Relationen R_a gibt es? [*2 Punkte*]

   c) Geben Sie (in Mengenschreibweise) eine Relation $R_b \subseteq \mathbb{G}_2 \times \mathbb{G}_4$ an, so dass $R_b \circ R_a$ rechtstotal und linkseindeutig ist. [*2 Punkte*]

2. Gegeben sind zwei Relationen $R_1, R_2 \subseteq \mathbb{G}_n \times \mathbb{G}_n$.

   Beweisen oder widerlegen Sie:

   a) R_1 ist reflexiv und $R_1 \subseteq R_2$, so ist auch R_2 reflexiv. [*2 Punkte*]

   b) R_1 ist symmetrisch und $R_1 \subseteq R_2$, so ist auch R_2 symmetrisch. [*2 Punkte*]

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 2:

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Die Funktion $f : Z \times X \to Z$ bezeichnet wie in der Vorlesung definiert die Zustandsüberführungsfunktion eines endlichen Akzeptors $A = (Z, z_0, X, f, F)$.

Gegeben ist die Definition der erweiterten Zustandsüberführungsfunktion $f^* : Z \times X^* \to Z$

$$f^*(z, \epsilon) = z$$
$$\forall z \in Z : \forall w \in X^* : \forall x \in X : f^*(z, xw) = f^*(f(z, x), w)$$

a) Beweisen Sie für alle $x \in X, w \in X^*, z \in Z$:

$$f^*(z, wx) = f(f^*(z, w), x)$$

per Induktion über $|w|$. *[5 Punkte]*

b) Geben Sie die (rekursive) Definition der erweiterten Zustandsüberführungsfunktion $f^{**} : Z \times X^* \to Z^*$ an. *[1 Punkt]*

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 3:

Aufgabe 4 (10 Punkte)

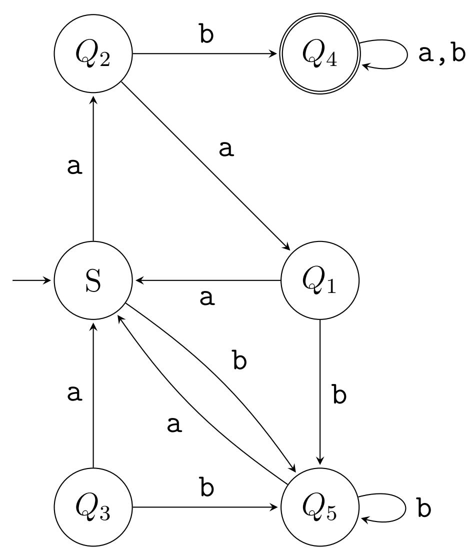
1. Geben Sie zu folgenden formalen Sprachen L_i, $i \in \{1, 2\}$ über dem Alphabet $A = \{0, 1\}$ jeweils einen endlichen Akzeptor Z_i (wie in der Vorlesung definiert) an, so dass $L(Z_i) = L_i$.

   a) $L_1 = \{w \in A^* \mid w \text{ enthält gleich viele Teilwörter 01 und 10}\}$ *[3 Punkte]*

   b) $L_2 = \{w \in A^* \mid (N_0(w) \bmod 2 \equiv 0) \vee (N_1(w) = 1)\}$ *[3 Punkte]*

   Hinweis: Akzeptoren mit mehr als 7 Zuständen geben Punktabzug.

2. Gegeben ist folgender Akzeptor B



   a) Geben Sie einen Akzeptor B' mit vier Zuständen an, so dass $L(B) = L(B')$. *[2 Punkte]*

   b) Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, so dass $\langle R \rangle = L(B)$. Benutzen Sie dabei höchstens 30 Zeichen. *[2 Punkte]*

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 4:

Aufgabe 5 (4 Punkte)

In einer Projektbesprechung sitzen insgesamt 42 Programmierer. Davon sind $J = 12$ Java-, $C = 14$ C-, und $F = 16$ Fortran-Programmierer. Immer wenn zwei Programmierer, die bisher in unterschiedlichen Sprachen programmiert haben, miteinander diskutieren, führt dies dazu, dass beide zur dritten Programmiersprache wechseln.

Ist es möglich, dass durch eine Folge von Diskussionen (mit resultierendem Wechseln der Programmiersprache) irgendwann alle Teilnehmer in Fortran programmieren? Begründen Sie mit Hilfe einer geeigneten Invariante.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 5:

Aufgabe 6 (11 Punkte)

1. Zeichnen Sie alle gerichteten Graphen $G = (\mathbb{G}_4, E)$ für deren Adjazenzmatrix **A** gilt:
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
[3 Punkte]

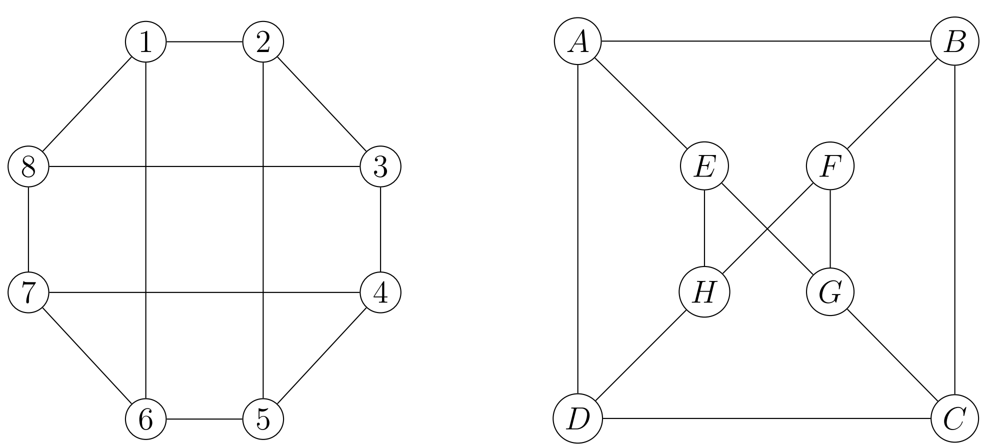
2. Gegeben sei ein ungerichteter Baum $G = (V, E)$ mit n Knoten. Weiter sei definiert: $G' = (V, E')$, mit $E' = \{\{u, v\} \mid u \in V, v \in V, u \neq v$ und $\{u, v\} \notin E\}$.

   Geben Sie eine möglichst scharfe Bedingung für n an, damit G' auch ein Baum sein kann. Begründen Sie Ihre Antwort. *[3 Punkte]*

3. Zeigen oder widerlegen Sie:

   In einem ungerichteten Baum $G = (V, E)$ mit mindestens 3 Knoten und $|\{x \mid x \in V \wedge d(x) = 1\}| = 2$ haben alle anderen Knoten Grad 2.
   Hinweis: Argumentieren Sie (ohne Induktion) über die Summe der Knotengrade. *[3 Punkte]*

4. Sind folgende zwei Graphen G_1 und G_2 isomorph?



   Falls ja, geben Sie den Isomorphismus an.
   Falls nein, begründen Sie kurz. *[2 Punkte]*

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 6:

Aufgabe 7 (9 Punkte)
In dieser Aufgabe geht es um Turingmaschinen.

Sei A eine endliche Menge und $R \subseteq A \times A$ eine Relation. Weiter existiert die Darstellung als Wort über A:

$$a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n \qquad \text{mit } (a_i, b_i) \in R, \text{für } 1 \leq i \leq n$$

Sei nun $x \in A$. T_x ist die Turingmaschine, die als Eingabe ein Wort w über A erhält und y ausgibt (umgeben nur von Blanksymbolen), wenn w der obigen Syntax entspricht und es genau eine Zuordnung $(x, y) \in R$ gibt; doppelte Vorkommen dieser Zuordnung gelten dabei als Eingabefehler. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, terminiert T_x in einem Fehlerzustand.

a) Sei $A = \mathbb{G}_4$. Geben Sie die Ausgabe von T_0 bei Eingabe von folgenden Eingabewörtern jeweils an. Der Kopf der Turingmaschine stehe zu Beginn auf dem ersten Symbol des Eingabewortes.
Schreiben Sie "Fehler", wenn der Fehlerzustand angenommen wird. [*2 Punkte*]

- 10330221
- 10033
- 02320123
- 11002233

b) Sei $A = \mathbb{G}_2$. Geben Sie T_0 explizit an (grafisch oder tabellarisch). [*6 Punkte*]

c) Geben Sie eine möglichst scharfe obere Schranke in O-Notation für die worst case Laufzeit von T_x an in Abhängigkeit von der Länge des Eingabewortes w. [*1 Punkt*]

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 7:

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 7:

Schmierpapier

Schmierpapier

Schmierpapier

Schmierpapier