Name: Matr.-Nr.:

Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zur Klausur am 18.9.2012

Lösungsvorschlag:

a) Auf einer Menge M mit 3 Elementen gibt es 512 verschiedene Relationen $R \subseteq M \times M$.

wahr

b) Mindestens die Hälfte aller Relationen auf einer nichtleeren Menge M sind Funktionen.

falsch

c) Der Homomorphismus $c : \{a, b, c\}^* \to \{0, 1\}^*$, mit

$$c : \begin{cases} a \to 0, \\ b \to 01, \\ c \to 011 \end{cases}$$

ist injektiv.

wahr

d) Wenn (a, b) und (a, c) zu einer Halbordnung gehören, dann auch (b, c).

falsch

e) Die Sprache $L = \{a^r b^s c^t \mid (r + s + t) \bmod 2 \equiv 0\}$ ist regulär.

wahr

f) Für alle nichtleeren Mengen A, B gilt: $A \times B = B \times A$

falsch

g) $(\forall n \in \mathbb{N}_+ : f(n) < g(n)) \Rightarrow f(n) \notin O(g(n))$

falsch

h) $f \in O(g) \wedge u \in O(v) \Rightarrow \frac{f}{u} \in O(\frac{g}{v})$

falsch

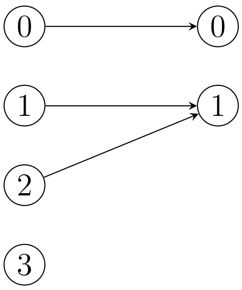
i) Die Grammatik $G = (\{S\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S, \{S \to \mathtt{a}S\mathtt{b} \mid \mathtt{b}S\mathtt{a} \mid \epsilon\})$ erzeugt alle Wörter w über $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ mit $N_{\mathtt{a}}(w) = N_{\mathtt{b}}(w)$.

falsch

j) $<\subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0,\ >\subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.
$x(< \circ >)y \Leftrightarrow x < y + x + 1$

falsch

Lösungsvorschlag

1. a) 

   b) Es gibt $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ solche Relationen R_a.

   c) $R_b = \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3)\}$

2. (a) Die Behauptung ist korrekt. Da R_1 reflexiv ist, gilt: $\forall x \in \mathbb{G}_n : (x,x) \in R_1$.

   Da $R_1 \subseteq R_2$ gilt $\forall x \in \mathbb{G}_n : (x,x) \in R_2$, was bedeutet, dass R_2 auch reflexiv ist.

   (b) Die Behauptung ist falsch.

   Gegenbeispiel: $R_1 = \{(0,0)\}, R_2 = \{(0,0),(0,1)\}$. R_1 ist symmetrisch und es gilt offensichtlich $R_1 \subseteq R_2$. Jedoch ist R_2 nicht symmetrisch, da $(1,0)$ nicht in R_2 ist.

Lösungsvorschlag:

1. **Induktionsanfang:** Für $w = \epsilon$ gilt: $f^*(z, \epsilon x) = f^*(z, x\epsilon) = f^*(f(z,x), \epsilon) = f(z,x) = f(f^*(z, \epsilon), x)\surd$.

   Induktionsvoraussetzung:

   Für alle Wörter w' mit beliebiger, aber fester Länge $n \in \mathbb{N}_0$ gelte: $\forall z \in Z : \forall x \in X : f^*(z, w'x) = f(f^*(z, w'), x)$.

   Induktionsschritt: Gezeigt wird, dass die Behauptung auch für Wörter w der Länge $n+1$ gilt. $x, y \in X$.

   $f^*(z, wx) = f^*(z, yw'x) = f^*(f(z,y), w'x) \overset{\text{IV}}{=} f(f^*(f(z,y), w'), x) \overset{\text{nach Def.}}{=} f(f^*(z, yw'), x) = f(f^*(z, w), x)$. $\square$

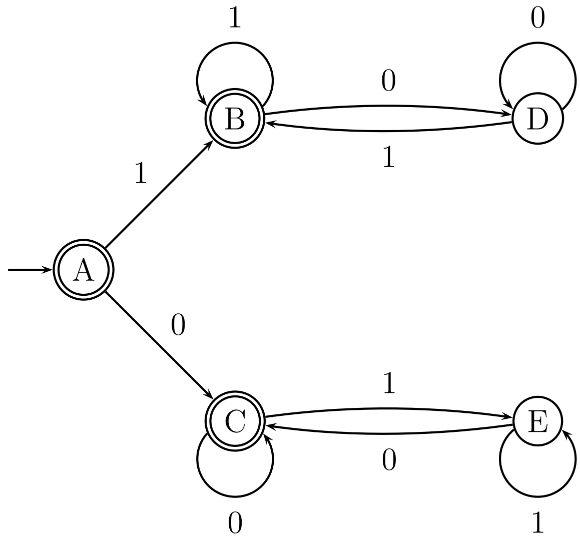
2.

$$
\begin{aligned}
f^{**}(z, \epsilon) &= z \\
\forall z \in Z : \forall w \in X^* : \forall x \in X : f^{**}(z, wx) &= f^{**}(z, w) \cdot f^*(f(z,x), w)
\end{aligned}
$$

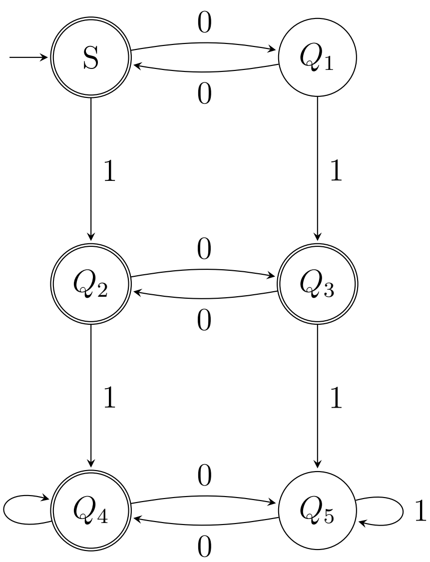
   oder auch das hier:

$$
\begin{aligned}
f^{**}(z, \epsilon) &= z \\
\forall z \in Z : \forall w \in X^* : \forall x \in X : f^{**}(z, xw) &= z \cdot f^{**}(f(z,x), w)
\end{aligned}
$$

Lösungsvorschlag:

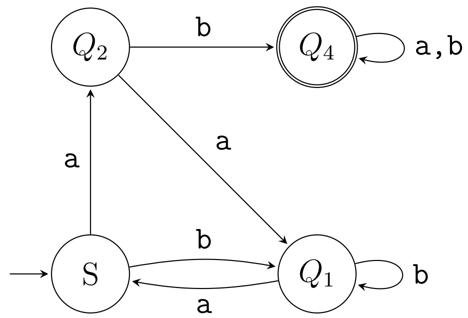


1. a)



b)

2. a)



b) R : `(aab*a | bb*a)* ab (a|b)*`

Lösungsvorschlag:

Schleifeninvariante.

Damit alle Programmierer in Fortran programmieren (also $F = 42$), muss gelten $C = 0$ und $J = 0$.

Um dies zu erreichen, muss die Differenz $C - J = 0$ sein.

Die Differenzen in der Anfangsverteilung sind $C - J = F - C = 2, F - J = 4$.

Als mögliche Neuverteilung nach einer Iteration gibt es 3 Möglichkeiten:

- C und J wechseln zu F:
- C und F wechseln zu J:
- F und J wechseln zu C:

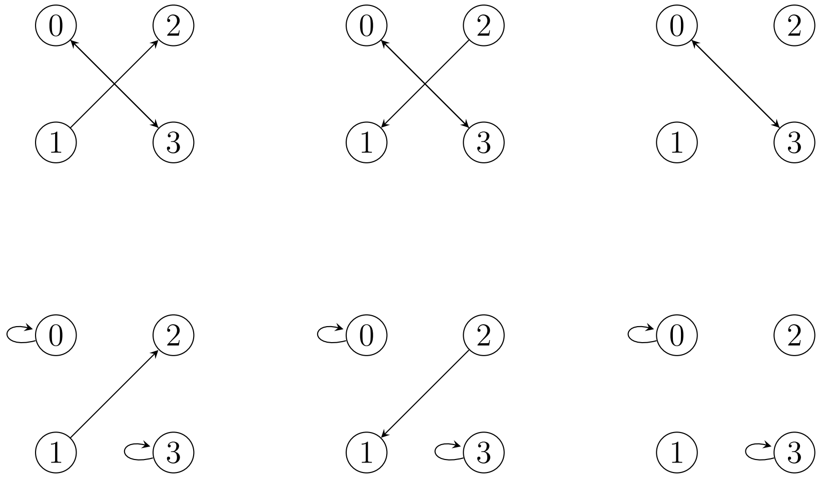
Für die Differenzen gilt dabei zuvor $C - J = x, F - C = y, F - J = z$ und nach der Iteration:

- C und J wechseln zu F: $C - J = x, F - C = y + 3, F - J = z + 3$
- C und F wechseln zu J: $C - J = x - 3, F - C = y, F - J = z - 3$
- F und J wechseln zu C: $C - J = x + 3, F - C = y - 3, F - J = z$

Man sieht, dass die Differenzen mod 3 invariant sind. Mit der gegebenen Anfangsverteilung ist es also nicht möglich $C - J = 0$ zu erreichen und alle Teilnehmer in Fortran programmieren zu lassen.

Lösungsvorschlag:

1. Es gibt folgende 6 Möglichkeiten:



2. $G \cup G'$ wäre (nach Definition von G') der vollständige Graph G_{voll}, also ein (schlingenfreier) Graph, in dem jeder Knoten mit jedem anderen Knoten über eine Kante verbunden ist. Die Anzahl der Kanten in G_{voll} beträgt $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$, für $n = |V|$.

   Da G und G' Bäume sind, haben sie jeweils n Knoten mit $n-1$ Kanten.

   Es muss also gelten: $(n-1) + (n-1) = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$

   $\Leftrightarrow 2 \cdot (2n-2) = n^2 - n$

   $\Leftrightarrow 0 = n^2 - 5n + 4$

   $\Leftrightarrow 0 = (n-4) \cdot (n-1)$

   Es muss also gelten $n = 1$ oder $n = 4$.

3. Ein Baum mit n Knoten besitzt $n-1$ Kanten.

   $\sum_{i=1}^{n} d(i) = 2(n-1)$

   Genau zwei Knoten haben Grad 1 $\Rightarrow 1 + 1 + \sum_{i=3}^{n} d(i) = 2(n-1) \Leftrightarrow$ $\sum_{i=3}^{n} d(i) = 2(n-2)$

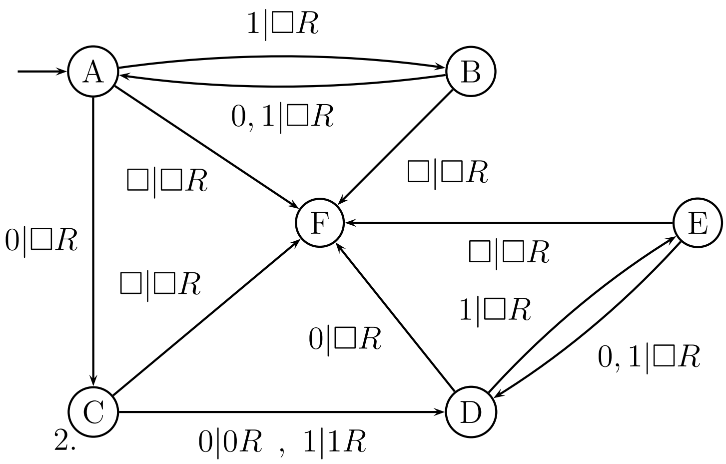
   Da G ein Baum ist und damit zusammenhängend, hat jeder Knoten mindestens Grad 1. Nach Aufgabenstellung gibt es jedoch nur 2 Knoten mit Grad 1, alle anderen Knoten haben also mindestens Grad 2. Damit $\sum_{i=3}^{n} d(i) = 2(n-2)$ erfüllt ist, bleibt also nur die Möglichkeit, dass alle anderen Knoten Grad 2 besitzen.

4. Die beiden Graphen sind nicht isomorph, da es z.B. in G_2 einen Kreis der Länge 5 gibt (z.B. (A, E, G, C, D, A)) in G_1 jedoch nicht.

Lösungsvorschlag:

1.
   - 2
   - Fehler
   - Fehler
   - 0

2.



3. Die worst case Laufzeit liegt in $O(|w|)$.