Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 13

Aufgabe 13.1 (4+4+2 Punkte)

Für $k \in \mathbb{N}_+$ sei die formale Sprache L_k über dem Alphabet $\{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$ folgendermaßen definiert: Das k-letzte Zeichen eines Wortes $w \in L_k$ ist ein $\mathtt{a}$.

a) Bestimmen Sie alle Nerode-Äquivalenzklassen zu L_2 und geben Sie zu jeder Klasse einen regulären Ausdruck an.

b) Geben Sie einen endlichen Akzeptor A_3 an, für den gilt $L(A_3) = L_3$.

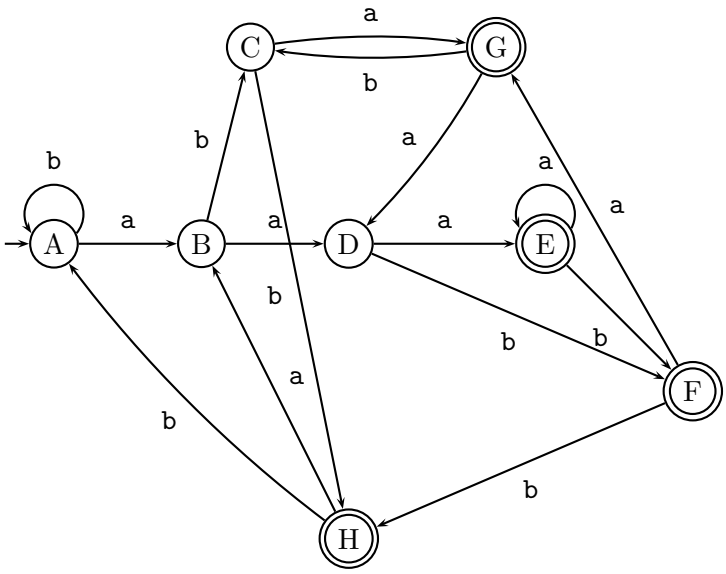
c) Wie viele Nerode-Äquivalenzklassen hat L_k?

Lösung 13.1

a) Es gibt 4 Nerode Äquivalenzklassen.

$[\mathtt{bb}\ ]$: $\langle((\mathtt{a}|\mathtt{b}) * \mathtt{bb})|\mathtt{b}*\rangle$ $\quad$ $[[\mathtt{ba}]]$: $\langle((\mathtt{a}|\mathtt{b}) * \mathtt{ba})|\mathtt{a}\rangle$

$[\mathtt{ab}\ ]$: $\langle(\mathtt{a}|\mathtt{b}) * \mathtt{ab}\rangle$ $\quad$ $[[\mathtt{aa}]]$: $\langle(\mathtt{a}|\mathtt{b}) * \mathtt{aa}\rangle$



b)

c) L_k hat 2^k Nerode-Äquivalenzklassen.

Aufgabe 13.2 (4 Punkte)
Gegeben sei eine Relation $R \subseteq M \times M$. R^{-1} ist definiert als $\{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : (R \cup R^{-1})^i$ ist symmetrisch.

Lösung 13.2
Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach i.

Induktionsanfang: $i = 0 : (R \cup R^{-1})^0$ ist nach Definition gerade die Identität, welche symmetrisch ist. $\surd$

Induktionsvoraussetzung:
Für ein beliebiges, aber festes $i \in \mathbb{N}_0$ gilt: $(R \cup R^{-1})^i$ ist symmetrisch.

Induktionsschluss: Wir zeigen, dass die Eigenschaft auch für $(a,b) \in (R \cup R^{-1})^{i+1}$ gilt:

$(a,b) \in (R \cup R^{-1})^{i+1} \Leftrightarrow (a,b) \in ((R \cup R^{-1}) \circ (R \cup R^{-1})^i)$

$\Leftrightarrow \exists c \in M : (a,c) \in (R \cup R^{-1})^i \wedge (c,b) \in (R \cup R^{-1})$

$\overset{nach\,IV}{\Rightarrow} (c,a) \in (R \cup R^{-1})^i \overset{nach\,Def.}{\wedge} (b,c) \in (R \cup R^{-1})$

$\Rightarrow (b,a) \in ((R \cup R^{-1})^i \circ (R \cup R^{-1})) \iff (b,a) \in (R \cup R^{-1})^{i+1}$, also $(R \cup R^{-1})^{i+1}$ ist symmetrisch.

Aufgabe 13.3 (3+1 Punkte)
Die Relation $S \subseteq \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$ sei gegeben durch:

$$nSm \iff n \text{ ist Primzahl} \wedge m \text{ ist Primzahl} \wedge \mathrm{Repr}_{10}(n) = R(\mathrm{Repr}_{10}(m))$$

a) Überprüfen Sie S jeweils auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

b) Für welche nichtleere Grundmenge M ist $S \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation?

Hinweis: Zur Erinnerung: $R(\varepsilon) = \varepsilon$, $\forall w \in A^* : \forall x \in A : R(xw) = R(w)x$

Lösung 13.3

a) • Die Relation ist nicht reflexiv, da $\exists n \in \mathbb{N}_+ : (n,n) \notin S$, z.B. $(8,8) \notin S$.

- Die Relation ist symmetrisch: $(n, m) \in S \iff n$ ist Primzahl$\wedge m$ ist Primzahl$\wedge$ $\text{Repr}_{10}(n) = R(\text{Repr}_{10}(m))$.

  Trivial: Wenn n und m Primzahlen sind, dann sind auch m und n Primzahlen $\Rightarrow$ "Reihenfolge egal"

  $\text{Repr}_{10}(n) = R(\text{Repr}_{10}(m)) \iff R(\text{Repr}_{10}(n)) = R(R(\text{Repr}_{10}(m))) \iff$ $\text{Repr}_{10}(m) = R(\text{Repr}_{10}(n))$

  $\Rightarrow (n, m) \in S \Rightarrow (m, n) \in S$

- Die Relation ist nicht transitiv: $(13, 31) \in S \wedge (31, 13) \in S$ jedoch $(13, 13) \notin S$, da $\text{Repr}_{10}(13) \neq R(\text{Repr}_{10}(13)$

b) S ist z.B. für die Grundmenge der einstelligen Primzahlen $\{2, 3, 5, 7\}$ eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 13.4 (4 Punkte)

Gegeben sei die folgende Turingmaschine T:

- Zustandsmenge ist $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$.
- Anfangszustand ist z_0.
- Bandalphabet ist $X = \{\square, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.
- Die Arbeitsweise ist wie folgt festgelegt:

	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
a	$(z_1, \square, 1)$	$(z_1, \mathtt{a}, 1)$	$(z_3, \mathtt{a}, -1)$	-	$(z_4, \mathtt{a}, -1)$	$(z_5, \mathtt{b}, 1)$
b	$(z_5, \mathtt{a}, 1)$	$(z_2, \mathtt{b}, 1)$	$(z_2, \mathtt{b}, 1)$	$(z_4, \mathtt{a}, -1)$	$(z_4, \mathtt{b}, -1)$	$(z_5, \mathtt{a}, 1)$
$\square$	-	-	$(z_3, \square, -1)$	-	$(z_0, \square, 1)$	$(z_4, \square, -1)$

Der Kopf der Turingmaschine stehe zu Beginn auf dem ersten Symbol von $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ (sofern w nicht das leere Wort ist).

Geben Sie für die Eingabe aabbbb die Anfangskonfiguration, die Endkonfiguration und jede weitere Konfiguration an, die sich während der Berechnung nach einer Änderung der Bandbeschriftung ergibt.

Lösung 13.4

Anfangskonfiguration: $z_0\mathtt{aabbbb}$

Zwischenkonfigurationen:

$z_1\mathtt{abbbb} \Rightarrow \mathtt{abb}z_4\mathtt{ba} \Rightarrow z_1\mathtt{bbba} \Rightarrow \mathtt{b}z_4\mathtt{baa} \Rightarrow \mathtt{a}z_5\mathtt{baa} \Rightarrow \mathtt{aa}z_5\mathtt{aa} \Rightarrow \mathtt{aab}z_5\mathtt{a} \Rightarrow$ $\mathtt{aabb}z_5\square \Rightarrow z_1\mathtt{abb} \Rightarrow \mathtt{a}z_4\mathtt{ba} \Rightarrow z_1\mathtt{ba} \Rightarrow z_4\square\mathtt{aa} \Rightarrow z_1\mathtt{a}$

Endkonfiguration: $\mathtt{a}z_1\square$