Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 2

Aufgabe 2.1 (4 Punkte)

a) Stellen Sie für folgende Formel eine Wahrheitstabelle auf.

$$(A \Leftrightarrow \neg B) \wedge \neg((C \Rightarrow B) \vee A))$$

Lösung 2.1

			1.	*5.*	*4.*	*2.*	*3.*
A	B	C	$(A \Leftrightarrow \neg B)$	$\wedge$	$\neg$	$((C \Rightarrow B)$	$\vee A))$
0	0	0	0	**0**	0	1	1
0	0	1	0	**0**	1	0	0
0	1	0	1	**0**	0	1	1
0	1	1	1	**0**	0	1	1
1	0	0	1	**0**	0	1	1
1	0	1	1	**0**	0	0	1
1	1	0	0	**0**	0	1	1
1	1	1	0	**0**	0	1	1

Aufgabe 2.2 (4 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden vier Aussagen:

1. $\forall x \in \mathbb{N}_0 : \exists y \in \mathbb{N}_0 : x = y$
2. $\forall x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : x = y$
3. $\exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : x = y$
4. $\exists x \in \mathbb{N}_0 : \exists y \in \mathbb{N}_0 : x = y$

Welche dieser Aussagen sind wahr, welche sind falsch. Ist eine Aussage wahr, so geben Sie eine Begründung. Ist sie falsch, so geben Sie ein Gegenbeispiel.

Lösung 2.2

1. wahr: Für alle natürlichen Zahlen gibt es ein identisches Element aus den natürlichen Zahlen.

2. falsch, kann nicht für alle natürlichen Zahlen gelten: $0 \neq 42$
3. falsch: Gäbe es so eine Zahl, dann wären alle natürlichen Zahlen identisch mit dieser Zahl und alle natürlichen Zahlen gleich dieser Konstanten. ↯
4. wahr: Für alle natürlichen Zahlen gibt es ein identisches Element aus den natürlichen Zahlen.

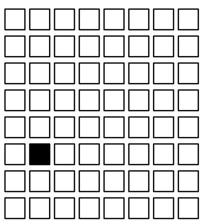
Aufgabe 2.3 (2 Punkte)
Gegeben ist folgende Aussage:

- Jeder Mensch hat genau einen besten Freund.

Formalisieren Sie diese Aussage mit Hilfe des Prädikates $B(x, y)$ in Prädikatenlogik:
$B(x, y) \mathrel{\widehat{=}} y$ ist bester Freund von x.
Variieren Sie dabei nicht über die Menge der zu betrachtenden Menschen.

Lösung 2.3
M sei die Menge aller Menschen.
$\forall x \in M : \exists y \in M : B(x, y) \wedge \forall z \in M : (z \neq y) \Rightarrow \neg B(x, z)$

Aufgabe 2.4 (4 Punkte)



Gegeben sei ein quadratisches Spielbrett mit Seitenlänge 2^n Feldern ($n \in \mathbb{N}_+$), aus dem ein einzelnes beliebiges Feld herausgenommen wurde.
Außerdem stehen unbegrenzt viele L-förmige Spielsteine, die jeweils 3 Felder bedecken, zur Verfügung.
Zeigen oder widerlegen Sie: Man kann ohne Überlappungen und Lücken dieses Spielfeld mit den Spielsteinen bedecken.

Lösung 2.4

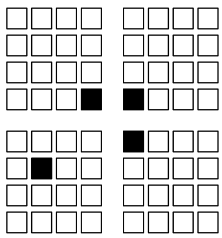
Induktionsanfang: Das kleinstmögliche Spielbrett besteht aus 2×2 Felder, bei denen eines dieser 4 Felder fehlt. Alle vier Möglichkeiten können mit einem Spielstein bedeckt werden. $\surd$

Induktionsvoraussetzung:
Für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}_+$ gelte:
Ein Spielbrett mit $2^n \times 2^n$ Feldern (wobei ein einzelnes Feld herausgenommen wurde) kann ohne Überlappungen und Lücken mit den L-förmigen Spielsteinen bedeckt werden.

Induktionsschluss: Wir zeigen, dass dies dann auch mit einem Spielbrett mit gleicher Eigenschaft mit Größe $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ möglich ist.

Dieses Spielbrett lässt sich in vier Spielbretter mit Größe $2^n \times 2^n$ teilen. In einem dieser Spielbretter fehlt ein einzelnes Feld und nach Induktionsvoraussetzung lässt sich dieses Teilbrett mit den L-förmigen Spielsteinen wie gefordert bedecken.

Wenn man einen L-förmigen Spielstein (wie in der Abbildung verdeutlicht) in die Mitte des Spielbrettes legt, so dass in jedem der "übrigen" 3 Bretter der Größe $2^n \times 2^n$ genau ein Feld bedeckt wird, lässt sich wieder nach IV auch der Rest der jeweiligen Spielbretter mit den Spielsteinen bedecken.



Aufgabe 2.5 (2+4 Punkte)

Gegeben sei folgende induktiv definierte Folge von Zahlen:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}_0 \wedge n \geq 3 : x_n &= \frac{n}{n-1} x_{n-1} + \frac{n}{n-2} x_{n-2} \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie x_3, x_4, x_5.

b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_n = n \cdot f_n$
Dabei ist f_n die n-te Fibonacci Zahl.

Hinweis: Die n-te Fibonacci Zahl f_n ist wie folgt definiert: $f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

Lösung 2.5

a)
- $x_3 : 6$
- $x_4 : 12$
- $x_5 : 25$

Hinweis: Punktverteilung: 0,5 + 0,5 + 1 Punkt

b) **Induktionsanfang:** Nach Definition gilt $x_0 = 0 = 0 \cdot f_0$.
$x_1 = 1 = 1 \cdot f_0 \surd$

Induktionsvoraussetzung:
Für ein festes, aber beliebiges $(n-1) \in \mathbb{N}_+$ gelte $x_{n-1} = (n-1) \cdot f_{n-1}$ und $x_{n-2} = (n-2) \cdot f_{n-2}$.

Induktionsschluss: Wir zeigen, dass dann auch $x_n = n \cdot f_n$ gelten muss.

$$\begin{aligned} x_n &\overset{\text{Def.}}{=} \frac{n}{n-1} x_{n-1} + \frac{n}{n-2} x_{n-2} \\ &\overset{\text{Ind.vor.}}{=} \frac{n}{n-1}(n-1) \cdot f_{n-1} + \frac{n}{n-2}(n-2) \cdot f_{n-2} \\ &= n \cdot f_{n-1} + n \cdot f_{n-2} \\ &= n \cdot (f_{n-1} + f_{n-2}) \\ &= n \cdot f_n \qquad \square \end{aligned}$$

Hinweis: IA und IV geben jeweils einen Punkt, IS 2 Punkte