

Grundbegriffe der Informatik Musterlösung zu Aufgabenblatt 5

Aufgabe 5.1 (2+2 Punkte)

Geben Sie jeweils eine kontextfreie Grammatik G_x an, so dass für folgende Sprachen L_x , mit $x \in \{a, b\}$ gilt: $L_x = L(G_x)$.

- a) $L_a = L_1^*$, $L_1 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid b^i a^n b^j c^n b^k, \quad n \in \mathbb{N}_+, i, j, k \in \mathbb{N}_0\}$
- b) Ein Wort $w \in \{a, b\}^*$ ist genau dann in L_b , wenn das maximal lange Anfangsstück von w , das nur aus a besteht, und das maximal lange Endstück von w , das nur aus a besteht, gleiche Länge haben.

Lösung 5.1

- a) $G_a = (\{S, X, A, B\}, \{a, b\}, S, P)$, mit

$$P = \{ \begin{array}{l} S \rightarrow SS \mid X \mid \varepsilon, \\ X \rightarrow bX \mid Xb \mid A, \\ A \rightarrow aAc \mid aBc, \\ B \rightarrow bB \mid \varepsilon. \end{array} \}$$

- b) $G_b = (\{S, A\}, \{a, b\}, S, P)$, mit

$$P = \{ \begin{array}{l} S \rightarrow aSa \mid bAb \mid a \mid b \mid \varepsilon, \\ A \rightarrow bA \mid aA \mid \varepsilon. \end{array} \}$$

Aufgabe 5.2 (3+3 Punkte)

Bei der Postfix-Notation werden die Operatoren hinter die Operanden geschrieben. Beispiel: Statt $(1 + 2) * (2 + 3)$ schreibt man in Postfix-Notation: $1\ 2\ +\ 2\ 3\ +\ *$

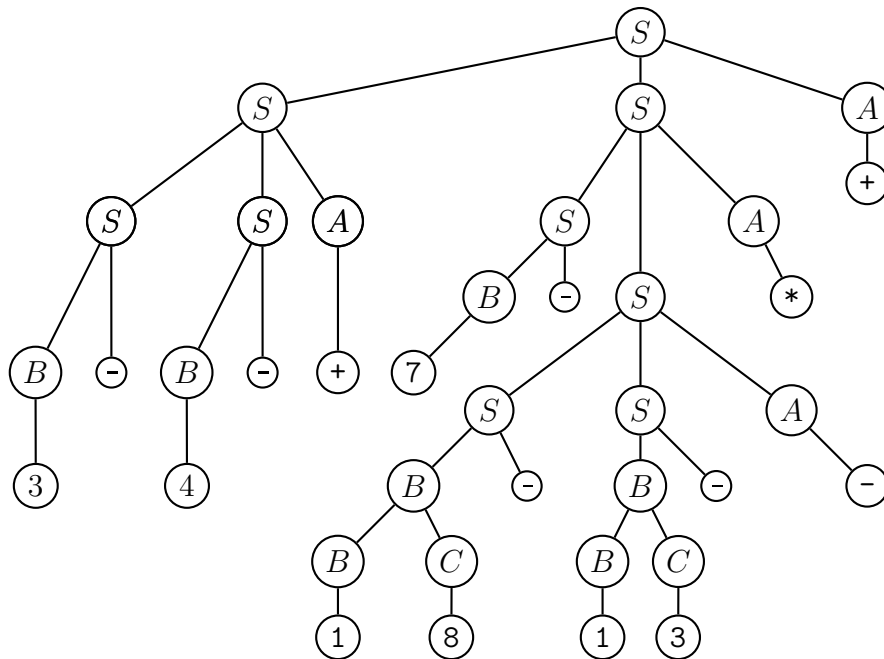
- a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die die Sprache der korrekten arithmetischen Ausdrücke, die nur Addition, Subtraktion und Multiplikation benutzen, über $\mathbb{N}_0$ in Postfix-Notation erzeugt. Benutzen Sie das Alphabet $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, -, +, *, _ \}$. Das Zeichen $_$ markiert dabei das Ende einer Zahl.
- b) Geben Sie für das Wort $3_4_+7_18_13_-*+$ einen Ableitungsbaum in Ihrer Grammatik an.

Lösung 5.2

a) $G_a = (\{S, A, B, C\}, \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, -, +, -, *\}, S, P)$, mit

$$P = \{ \begin{array}{l} S \rightarrow SSA \mid B_- \mid 0_- , \\ A \rightarrow + \mid - \mid * , \\ B \rightarrow BC \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9 , \\ C \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9 \} . \end{array}$$

Hinweis: Hier existiert eine zusätzliche Produktion um führende Nullen zu vermeiden. Sollte das nicht berücksichtigt worden sein, gibt es keinen Punktabzug.



b)

Aufgabe 5.3 (6 Punkte)

Gegeben ist die kontextfreie Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow abS, S \rightarrow \varepsilon\})$ und die formale Sprache $L = \{(ab)^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

Zeigen Sie durch vollständige Induktion $L(G) = L$, indem Sie beide Inklusionen beweisen.

Lösung 5.3

Hinweis: Zur Erinnerung: $L(G) = \{w \in T^* \mid S \Rightarrow^* w\}$

- erste Teilmengenrelation $L(G) \subseteq L$, Induktion über Ableitungslänge $\Rightarrow^n$

Induktionsanfang $n = 1$: Es bedarf mindestens einem Ableitungsschritt, um ein Terminalsymbol zu erzeugen

$S \Rightarrow^1 \varepsilon = (\mathbf{ab})^0 \checkmark$ (ε ist das einzige Wort $\in L(G)$, das nach einem Ableitungsschritt erzeugt werden kann)

Induktionsvoraussetzung:

Für beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_+$ gilt:

$S \Rightarrow^n (\mathbf{ab})^m$, mit $m \in \mathbb{N}_0$

Induktionsschluss: Wir zeigen, dass dann auch gilt: $S \Rightarrow^{n+1} (\mathbf{ab})^{m'}$

$S \Rightarrow^{n+1} w \Rightarrow S \Rightarrow^1 w' \Rightarrow^n w$

Da die nach $n + 1$ -ableitbaren Wörter $\in L(G)$ betrachtet werden und zudem $n + 1 \geq 2$ gilt, muss nach dem ersten Ableitungsschritt noch ein Nichtterminal vorhanden sein. Als erste Produktionsregel muss also $S \rightarrow \mathbf{ab}S$ gewählt werden.

$\Rightarrow S \Rightarrow^1 \mathbf{ab}S \xRightarrow{\text{Ind.vor.}} (\mathbf{ab})(\mathbf{ab})^m = (\mathbf{ab})^{m+1} = (\mathbf{ab})^{m'}$ mit $m' \in \mathbb{N}_0$

- zweite Teilmengenrelation $L \subseteq L(G)$, Induktion über Wortlänge $(\mathbf{ab})^n$:

Induktionsanfang: $n = 0$: $(\mathbf{ab})^0 = \varepsilon$

$S \Rightarrow \varepsilon \checkmark$

Induktionsvoraussetzung:

Für beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$S \Rightarrow^* (\mathbf{ab})^n$

Induktionsschluss: Wir zeigen, dass dann auch gilt: $S \Rightarrow^* (\mathbf{ab})^{n+1}$

$(\mathbf{ab})^{n+1} = (\mathbf{ab})(\mathbf{ab})^n : S \Rightarrow^1 \mathbf{ab}S \xRightarrow{\text{Ind.vor.}} \mathbf{ab}(\mathbf{ab})^n = (\mathbf{ab})^{n+1}$

Aufgabe 5.4 (3+2 Punkte)

Es sei $A = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

- a) Beschreiben Sie unter Benutzung nur der Symbole $\{, \}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \varepsilon, \cup, *, +$, sowie runde Klammer auf, runde Klammer zu und Komma, die folgende formale Sprache:

$L = \{w \in A^* \mid \text{wenn } \mathbf{a} \text{ in } w \text{ vorkommt, dann auch } \mathbf{b}\}$

Hinweis: Die Verwendung von mehr als 25 Zeichen gibt Punktabzug.

b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, so dass $L(G) = L$.

Lösung 5.4

a) $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}^* \cup \{\mathbf{a}, \mathbf{c}\}^* \{\mathbf{b}\} \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}^*$

Hinweis: Erst ab 30 Zeichen werden Punkte abgezogen: Also sowas wie: $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}^* \cup \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}^* \{\mathbf{b}\} \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}^*$ gibt volle Punkte

b) $G = (\{S, A, B\}, \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}, S, P)$, mit

$$P = \{ \begin{array}{l} S \rightarrow \mathbf{b}S \mid \mathbf{c}S \mid A \mid \varepsilon, \\ A \rightarrow \mathbf{a}A \mid \mathbf{c}A \mid \mathbf{b}B, \\ B \rightarrow \mathbf{a}B \mid \mathbf{b}B \mid \mathbf{c}B \mid \varepsilon. \end{array} \}.$$