

Grundbegriffe der Informatik Musterlösung zu Aufgabenblatt 9

Aufgabe 9.1 (3 Punkte)

Gegeben sind zwei Implementierungen A und B eines Algorithmus. Die Laufzeit von A liegt in $\Theta(n \log n)$ und die von B in $\Theta(n)$. Für eine Datengröße $n = 10^4$ benötigt A 100 ms und B 500ms. Ab welchem n lohnt sich der Einsatz von Implementierung B ? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung 9.1

Laufzeit von A : $c_1 n \log_{10} n = 100$ Für $n = 10^4 \Rightarrow c_1 = \frac{100}{10^{4.4}} = \frac{1}{400}$

Laufzeit von B : $c_2 n = 500$ $n = 10^4 \Rightarrow c_2 = \frac{500}{10^4} = \frac{1}{20}$

$$\frac{1}{20} n \stackrel{!}{=} \frac{1}{400} n \log_{10} n \Leftrightarrow$$

$$20 = \log_{10} n \Leftrightarrow n = 10^{20}$$

Ab einer Datengröße von $n = 10^{20}$ lohnt sich der Einsatz von Implementierung B .

Aufgabe 9.2 (3+3+3 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie für $n \in \mathbb{N}_+$:

a) $3^{\log_2(n)} \in \Theta(n^{\log_2(3)})$

b) $(n+1) \cdot \log(\sqrt{4n-2}) + \log((n!)^2) \in O(n \log n)$

c) Für alle Funktionen $f_1(n) > 0$, $g_1(n) > 0$, $f_2(n) > 0$, $g_2(n) > 0$ gilt:

$$(f_1(n) \in O(g_1(n)) \wedge f_2(n) \in O(g_2(n))) \Rightarrow \frac{f_1(n)}{f_2(n)} \in O\left(\frac{g_1(n)}{g_2(n)}\right)$$

Lösung 9.2

a) Die Behauptung stimmt.

Zu zeigen: $3^{\log_2(n)} \in \Theta(n^{\log_2(3)})$:

$$3 = 2^{\log_2(3)} \Rightarrow 3^{\log_2(n)} = (2^{\log_2 3})^{\log_2 n} = 2^{\log_2 3 \cdot \log_2 n} = (2^{\log_2 n})^{\log_2 3} = n^{\log_2 3}$$

D.h. mit der Wahl von $n_0 = c = c' = 1$ gilt $\forall n \geq 1 : 1 \cdot n^{\log_2(3)} \leq 3^{\log_2(n)} \leq 1 \cdot n^{\log_2(3)}$

b) Die Behauptung stimmt.

Zu zeigen: $(n+1) \cdot \log(\sqrt{4n-2}) + \log((n!)^2) \in O(n \log n)$

$$(n+1) \cdot \log(\sqrt{4n-2}) + \log((n!)^2)$$

$$\begin{aligned}
&= (n+1) \cdot \frac{1}{2} \log(4n-2) + 2 \log(n!) \\
&= (n+1) \cdot \frac{1}{2} \log(4n-2) + 2(\log(1) + \log(2) + \dots + \log(n)) \\
&\leq (n+1) \cdot \frac{1}{2} \log(4n-2) + 2(\log(n) + \log(n) + \dots + \log(n)) \\
&= (n+1) \cdot \frac{1}{2} \log(4n-2) + 2n \log(n) \\
&\stackrel{\text{mit } n > 0}{\leq} (n+n) \cdot \frac{1}{2} \log(4n-2) + 2n \log(n) \\
&= n \log(4n-2) + 2n \log(n) \\
&\leq n \log(4n) + 2n \log(n) \\
&\in O(n \log(n)) + O(n \log(n)) \\
&\stackrel{\text{nach VL}}{=} O(n \log(n))
\end{aligned}$$

c) Gegenbeispiel: $f_1(n) = g_1(n) = g_2(n) = n^2$, $f_2(n) = n$

Dann gilt zwar $f_1(n) \in O(g_1(n)) \wedge f_2(n) \in O(g_2(n))$, jedoch $\frac{f_1(n)}{f_2(n)} = \frac{n^2}{n} = n \notin O\left(\frac{g_1(n)}{g_2(n)}\right) = O(1)$,

Aufgabe 9.3 (4 Punkte)

Gegeben sei folgender Algorithmus für Eingabe $n = 2^m$, mit $m \in \mathbb{N}_+$:

```

x ← n
r ← 0
while x ≥ 1 do
  for i ← 1 to x do
    r ← r + 1
  od
  x ← x div 2
od

```

Geben Sie die Laufzeit $T(n)$ möglichst genau an. Begründen Sie Ihr Ergebnis.

Lösung 9.3

Nach jeder Iteration der while-Schleife wird n halbiert

$$\begin{aligned}
\Rightarrow T(n) &= n + n/2 + n/4 + \dots + \frac{n}{2^{\log_2 n}} \\
&= n \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{\log_2 n}}\right) \\
&= n \cdot \left(2 - \frac{1}{2^{\log_2 n}}\right) \\
&= 2n \left(1 - \frac{1}{2^{\log_2 n \cdot 2}}\right) = 2n \cdot \left(1 - \frac{1}{2n}\right) = 2n - 1
\end{aligned}$$

Der Algorithmus endet also nach $2n - 1$ Schritten.

Aufgabe 9.4 (4 Punkte)

Der Weihnachtsmann ist eine Person, die **außer Ihnen** jeder kennt. Der Weihnachtsmann kennt aber niemanden außer sich selbst.

Sie sind auf einer Weihnachtsfeier, auf der auch der Weihnachtsmann ist. Bei der Feier sind genau n Personen. Ihre Aufgabe ist es, den Weihnachtsmann anhand von Fragen der Form "Kennt die Person A die Person B?" zu finden. Darauf erhalten Sie die Antworten "ja" oder "nein". Entwickeln Sie eine Strategie, den Weihnachtsmann mit nur $O(n)$ Fragen herauszufinden.

Hinweis: Jeder kennt sich selbst.

Lösung 9.4

Sie fragen eine beliebige anwesende Person A, ob sie eine andere beliebige Person B kennt. Aus der Antwort erhält man 2 Möglichkeiten:

- Antwort "nein": Person B kann nicht der Weihnachtsmann sein, da A sie sonst kennen würde. Man kann B also von der Liste der möglichen Weihnachtsmänner streichen und die Frage (diesmal über eine andere Person B) nochmal an A richten.
- Antwort "ja": Person A kann nicht der Weihnachtsmann sein, da sie jemand anderen kennt. Man kann A also von der Liste der möglichen Weihnachtsmänner streichen und die Frage an B richten.

Nach jeder Frage kann man eine Person ausschließen, so dass nach $n - 1$ Fragen klar ist, wer der Weihnachtsmann ist.