Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 1

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr. Name des Tutors:

Ausgabe: 23. Oktober 2013

Abgabe: 31. Oktober 2013, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 1:	/ 16
Blätter 1 – 1:	/ 16

Aufgabe 1.1 (1+1+1=3 Punkte)
Gegeben seien zwei Relationen $R \subseteq \{1,2,3\} \times \{0,1,2\}$ und $S \subseteq \{1,2,3\} \times \{0,1,2\}$, die definiert sind vermöge

$$R = \{(x,y) \mid x < y\} \qquad \text{bzw.} \qquad S = \{(x,y) \mid x \leq y\}$$

a) Geben Sie R und S explizit an (als Mengen von Paaren von Zahlen).
b) Welche der Eigenschaften linkstotal, rechtstotal, linkseindeutig und rechtseindeutig hat R?
c) Welche der Eigenschaften linkstotal, rechtstotal, linkseindeutig und rechtseindeutig hat S?

Lösung 1.1

a) Es ist $R = \{(1,2)\}$ und $S = \{(1,1),(1,2),(2,2)\}$.

b) R ist weder links- noch rechtstotal, aber sowohl links- als auch rechtseindeutig.

c) S hat keine einzige der Eigenschaften.

Aufgabe 1.2 (2+1+1=4 Punkte)
Es seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ zwei beliebige Abbildungen. Eine dritte Abbildung $h\colon A \to C$ sei definiert durch: $\forall a \in A : h(a) = g(f(a))$.
a) Beweisen Sie die Behauptung:
Wenn h injektiv ist, dann ist auch immer f injektiv.
b) Widerlegen Sie die Behauptung:
Wenn h injektiv ist, dann ist auch immer g injektiv.
c) Sind die folgenden Behauptungen richtig oder falsch?
- Wenn h surjektiv ist, dann ist auch immer f surjektiv.
- Wenn h surjektiv ist, dann ist auch immer g surjektiv.

Lösung 1.2

a) Man beweist: Wenn f nicht injektiv ist, dann ist auch h nicht injektiv:

i) Sei also f nicht injektiv.
ii) Dann existieren $a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 \neq a_2$, aber $f(a_1) = f(a_2)$.
iii) Folglich ist auch $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$, also $h(a_1) = h(a_2)$ (obwohl $a_1 \neq a_2$).
iv) Also ist h nicht injektiv.

oder doch: wenn h injektiv, dann auch f injektiv

i) Sei h injektiv.
ii) Folglich ist für $a_1 \neq a_2$ stets $h(a_1) \neq h(a_2)$ also $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$
iii) Dann muss auch $f(a_1) \neq f(a_2)$ sein,

iv) also ist f injektiv.

b) Gegenbeispiel: Man nehme etwa $A = \{a\}$, $B = \{b_1, b_2\}$ und $C = \{c\}$.

Dann muss $g(b_1) = c = g(b_2)$ sein, also ist g nicht injektiv. Aber $h\colon \{a\} \to \{c\}$ ist injektiv, denn da A nur ein Element enthält, können von h gar nicht verschiedene Elemente auf das gleiche abgebildet werden.

c) Es ist

- h surjektiv impliziert f surjektiv: falsch
- h surjektiv impliziert g surjektiv: wahr

Aufgabe 1.3 (1+1=2 Punkte)
Es sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Geben Sie prädikatenlogische Formeln an, die ausdrücken: a) f ist injektiv. b) f ist surjektiv.

Lösung 1.3

a) zum Beispiel

$$\forall a_1 \in A\colon \forall a_2 \in A\colon a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

oder äquivalent

$$\forall a_1 \in A\colon \forall a_2 \in A\colon f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

b)

$$\forall b \in B\colon \exists a \in A\colon f(a) = b$$

Aufgabe 1.4 (3 Punkte)
Es seien A und B Aussagevariablen. Stellen Sie die Wahrheitstabelle auf für die Formel

$$(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$$

Lösung 1.4
Zum Beispiel so

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$
f	f	w	w	w
f	w	w	f	w
w	f	f	w	w
w	w	w	w	w

oder so

$(A$	$\Rightarrow$	$B)$	$\vee$	$(B$	$\Rightarrow$	$A)$
f	w	f	w	f	w	f
f	w	w	w	w	f	f
w	f	f	w	f	w	w
w	w	w	w	w	w	w

Aufgabe 1.5 (1+1=2 Punkte)

Es seien A, B und C drei Aussagevariablen.

a) Geben Sie zwei verschiedene Belegungen für (A, B, C) an, bei der jeweils nicht alle Variablen den gleichen Wahrheitswert haben.

b) Geben Sie eine aussagenlogische Formel $\mathcal{F}$ an, die für Ihre in Teil a) angegebenen Variablenbelegungen wahr wird und sonst nicht.

Lösung 1.5

a) Zum Beispiel so:

A	B	C
w	f	f
w	w	f

b) $(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$

Aufgabe 1.6 (1+1=2 Punkte)

Es sei A eine Aussagenvariable. In dieser Aufgabe geht es aussagenlogische Formeln, in denen außer A nur die Konnektive $\vee$, $\wedge$ und $\Rightarrow$ vorkommen, aber *nicht* die Negation $\neg$.

a) Gibt es eine solche Formel, die äquivalent ist zur Formel $\neg A$?

b) Erläutern Sie Ihre Antwort aus Teil a).

Lösung 1.6

a) Nein.

b) Die Lösung dieser Teilaufgabe geriet deutlich umfangreicher als es sich der Aufgabensteller ursprünglich dachte.
Der Einfachheit halber bezeichnen wir mit $\top$ die „Pseudoaussagevariable", die immer nur mit wahr belegt wird.
Die Formeln $A \wedge A$ und $A \vee A$ sind äquivalent zur Formel A. Die Formel $A \Rightarrow A$ ist äquivalent zu $\top$.
Man stelle sich nun vor, dass in einem ersten Schritt in der ursprünglichen Formel jedes Vorkommen von $A \Rightarrow A$ durch $\top$ ersetzt wird.
Damit hat man eine Formel der folgenden Bauart: Es kommen die „Variablen" A und $\top$ vor und (noch immer) höchstens die Konnektive $\vee$, $\wedge$ und $\Rightarrow$ (aber kein $\neg$).
Solche Formeln kann man auch vereinfachen, indem man beachtet:

- Für $\vee$ gilt:
  - Die Formel $A \vee A$ ist äquivalent zu A.
  - Die Formeln $A \vee \top$, $\top \vee A$ und $\top \vee \top$ sind äquivalent zu $\top$.
- Für $\wedge$ gilt:
  - Die Formel $\top \wedge \top$ ist äquivalent zu $\top$.
  - Die Formeln $A \wedge A$, $A \wedge \top$ und $\top \wedge A$ sind äquivalent zu A.
- Für $\Rightarrow$ gilt:
  - Die Formeln $A \Rightarrow A$, $\top \Rightarrow \top$ und $A \Rightarrow \top$ sind äquivalent zu $\top$.

– Die Formel $\top \Rightarrow A$ ist äquivalent zu A.

Durch diese Vereinfachungen bleibt es eine Formel der gleichen Bauart. Man kann die Formel also nach obigen Regeln so weit vereinfachen, dass am Ende überhaupt keine Konnektive mehr vorkommen.
Ergebnis ist also entweder A oder $\top$.
Und beide sind offensichtlich *nicht* äquivalent zu $\neg A$.