# Grundbegriffe der Informatik
# Lösungsvorschläge Aufgabenblatt 10

| | |
|---|---|
| Matr.nr.: | |
| Nachname: | |
| Vorname: | |
| Tutorium: | Nr. | Name des Tutors: |

Ausgabe: 10. Januar 2014

Abgabe: 17. Januar 2014, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengetackert

abgegeben werden.

---

*Vom Tutor auszufüllen:*

erreichte Punkte

| | |
|---|---|
| Blatt 10: | / 13 |
| Blätter 1 – 10: | / 180 |

**Aufgabe 10.1 (5 Punkte)**
Es sei $a \in \mathbb{N}_0$, $d \in \mathbb{N}_+$ und $T\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine Funktion mit den Eigenschaften

$$T(1) = d$$
$$\forall k \in \mathbb{N}_0\colon T(2^{k+1}) = a \cdot T(2^k) + d \cdot (2^{k+1})^2$$

a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0\colon T(2^k) = a^k \cdot d \cdot \sum_{i=0}^{k} \frac{4^i}{a^i}$$

b) Es sei nun (fast wie im Algorithmus von Strassen) $a = 7$ und $d = 4$. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $c \in \mathbb{R}_+$ gibt, so dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$T(2^k) \leq c \cdot (2^k)^{\log_2 7}$$

Sie können dabei die Tatsache benutzen, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{4^i}{7^i} \leq \frac{7}{3}$$

**Lösung 10.1**

a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0\colon T(2^k) = a^k \cdot d \cdot \sum_{i=0}^{k} \frac{4^i}{a^i}$$

**Ind.anfang:** $k = 0$: Zu zeigen: $T(2^0) = a^0 \cdot d \cdot \sum_{i=0}^{0} \frac{4^i}{a^i}$.

Die rechte Seite ist $= d \cdot \frac{4^0}{a^0} = d$ was nach Definition von $T$ gerade $T(1) = T(2^0)$ ist.

**Ind.voraussetzung:** Für ein beliebiges aber festes $k$ gelte

$T(2^k) = a^k \cdot d \cdot \sum_{i=0}^{k} \frac{4^i}{a^i}$.

**Ind.schluss:** Zu zeigen: $T(2^{k+1}) = a^{k+1} \cdot d \cdot \sum_{i=0}^{k+1} \frac{4^i}{a^i}$.

$$\begin{aligned}
T(2^{k+1}) &= a \cdot T(2^k) + d \cdot (2^{k+1})^2 && \text{nach Def. von } T \\
&= a \cdot a^k \cdot d \cdot \sum_{i=0}^{k} \frac{4^i}{a^i} + d \cdot (2^{k+1})^2 && \text{nach Ind.voraussetzung} \\
&= a^{k+1} \cdot d \cdot \sum_{i=0}^{k} \frac{4^i}{a^i} + d \cdot a^{k+1} \cdot \frac{1}{a^{k+1}} \cdot 4^{k+1} \\
&= a^{k+1} \cdot d \cdot \left( \sum_{i=0}^{k} \frac{4^i}{a^i} + \frac{4^{k+1}}{a^{k+1}} \right) \\
&= a^{k+1} \cdot d \cdot \sum_{i=0}^{k+1} \frac{4^i}{a^i}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
T(2^k) &= a^k \cdot d \cdot \sum_{i=0}^{k} \frac{4^i}{a^i} && \text{nach Teilaufgabe a)} \\
&\leq 7^k \cdot 4 \cdot \frac{7}{3} && \text{laut Hinweisen} \\
&= \frac{28}{3} \cdot (2^{\log_2 7})^k \\
&= c \cdot (2^k)^{\log_2 7} && \text{für } c = \frac{28}{3}
\end{aligned}$$

**Aufgabe 10.2 (4 Punkte)**

a) Gilt $3^{\sqrt{n}} \in O(2^n)$? Beweisen Sie Ihre Antwort.

b) Gilt $3^{\sqrt{n}} \in \Theta(2^n)$? Beweisen Sie Ihre Antwort.

c) Gilt $3^{\sqrt{n}} \in \Omega(2^n)$? Beweisen Sie Ihre Antwort.

**Lösung 10.2**

Für $n \geq n_0 = 4$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{3^{\sqrt{n}}}{2^n} = \left(\frac{3}{2^{\sqrt{n}}}\right)^{\sqrt{n}} &\leq \left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{n}} && (1) \\
&\leq \frac{3}{4} && (2)
\end{aligned}$$

a) Ja.

Begründung: Für $n \geq 4$ folgt aus Gleichung (2) unmittelbar $3^{\sqrt{n}} \leq \frac{3}{4}2^n$.

b) Nein.

Begründung: Weil die Antwort zu Teilaufgabe c) „nein" ist. Oder: Weil sonst $3^{\sqrt{n}} \in \Omega(2^n)$ wäre im Widerspruch zu Teilaufgabe c).

c) Nein.

Begründung: Aus Gleichung (1) folgt $3^{\sqrt{n}} \leq (3/4)^{\sqrt{n}} \cdot 2^n$. Da für große $n$ aber $(3/4)^{\sqrt{n}}$ gegen 0 geht, kann es für kein $c > 0$ der Fall sein, dass für alle hinreichend großen $n$ gilt: $3^{\sqrt{n}} \geq c \cdot 2^n$.

**Aufgabe 10.3 (2 Punkte)**

a) Für welche $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \geq 2$ gilt: $(\log_2 n)^{\log_2 n} \in O(n^k)$ ?

b) Für welche $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \geq 2$ gilt: $(\log_2 n)^{\log_2 n} \in \Omega(n^k)$ ?

**Lösung 10.3**
Beobachtung: Es ist

$$(\log_2 n)^{\log_2 n} = \left(2^{\log_2(\log_2 n)}\right)^{\log_2 n} = \left(2^{\log_2 n}\right)^{\log_2(\log_2 n)} = n^{\log_2(\log_2 n)}$$

a) Für kein $k$.

b) Für alle $k$.

**Aufgabe 10.4 (2 Punkte)**
Eine Funktion $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ heißt *monoton wachsend*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $f(n) \leq f(n+1)$.
Definieren Sie zwei Funktionen $f(n)$ und $g(n)$, so dass

- beide Funktionen monoton wachsend sind,
- *nicht* $f(n) \in O(g(n))$ gilt und
- *nicht* $g(n) \in O(f(n))$ gilt.

**Lösung 10.4**
Zum Beispiel leistet die folgende Idee gute Dienste: $f$ und $g$ „überholen“ sich immer abwechselnd. Genauer:

- für gerade $n$ ist $f(n) = f(n+1)$ und
- für ungerade $n$ ist $g(n) = g(n+1)$.

Und man sorgt dafür, dass gilt:

- für gerade $n$ ist $f(n) \geq g(n)$ und
- für ungerade $n$ ist $g(n) \geq f(n)$

und „die Abstände werden immer größer“, d. h. in der Folge $f(0)$, $g(1)$, $f(2)$, $g(3)$, und so weiter wachsen die Quotienten aufeinanderfolgender Werte unbeschränkt, z. B. wie $n$. Deshalb leisten die folgenden Festlegungen das Gewünschte:

$$f(n) = \begin{cases} n! & \text{falls } n \text{ gerade} \\ f(n-1) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ n! & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ g(n-1) & \text{sonst} \end{cases}$$