Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 11

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.
	Name des Tutors:

Ausgabe: 15. Januar 2014

Abgabe: 24. Januar 2014, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengetackert

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 11:	/ 20
Blätter 1 – 11:	/ 200

Für Aufgaben zu endlichen Automaten gilt generell: Falls Sie Bilder zeichnen, achten Sie darauf, dass erkennbar ist, welche Kante wie beschriftet ist. Für Automaten mit absurd vielen Zuständen gibt es Punktabzug. Was „absurd viel" ist, hängt von der Aufgabenstellung ab.

Aufgabe 11.1 (3 Punkte)
Für das Alphabet $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und jedes Wort $w \in X^*$ sei die „Symbolwechsel-Faktorisierung" $(v_0, v_1, \cdots, v_k)$ wie folgt definiert:

- $w = v_0 \cdot v_1 \cdot \cdots \cdot v_k$
- $\forall 0 \leq i \leq k \colon v_i \in \{x\}^+$ für ein $x \in X$
- $\forall 0 \leq i < k \colon v_i(0) \neq v_{i+1}(0)$
  (*Erinnerung:* $v(0)$ ist das erste Symobl von v.)

Geben Sie einen Mealy-Automaten mit Eingabealphabet X, Ausgabealphabet $Y = X$ an, der jede Eingabe $w \in X^+$ übersetzt in die Ausgabe $g^{**}(w) = v_0(0) \cdot v_1(0) \cdot \cdots \cdot v_k(0)$.

Aufgabe 11.2 (3+1=4 Punkte)
Für das Alphabet $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und jedes Wort $w \in X^*$ sei $T(w) \in X^*$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} T(\varepsilon) &= \varepsilon \\ \forall x \in X \colon T(x) &= x \\ \forall x, y \in X \colon \forall w \in X^* \colon T(xyw) &= yxT(w) \end{aligned}$$

a) Geben Sie einen Mealy-Automaten mit Eingabealphabet X, Ausgabealphabet $Y = X$ und möglichst wenig Zuständen an, der jede Eingabe $w \in X^+$ gerader Länge übersetzt in die Ausgabe $g^{**}(w) = T(w)$. Was der Automat für Eingaben ungerader Länge ausgibt, ist gleichgültig.
b) Definieren Sie eine Funktion S, die angibt, welche Ausgaben Ihr Automat aus Teilaufgabe a) für Eingaben beliebiger Länge produziert. Nehmen Sie bei der Definition von S *nicht* Bezug auf den Automaten; die Antwort $S = g^{**}$ ist also verboten.

Aufgabe 11.3 (2+2+1+1+2=8 Punkte)
Für das Alphabet $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und jedes Wort $w \in X^*$ sei $B(w) \in X^*$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} B(\varepsilon) &= \varepsilon \\ \forall x \in X \colon B(x) &= x \\ \forall x, y \in X \colon \forall w \in X^* \colon B(xyw) &= \begin{cases} \mathtt{ab}B(w) & \text{falls } x \neq y \\ xxB(w) & \text{falls } x = y \end{cases} \end{aligned}$$

a) Beweisen Sie durch Induktion, dass für alle $w \in X^*$ gilt: $|w| = |B(w)|$.
b) Geben Sie einen Moore-Automaten mit Eingabealphabet X, Ausgabealphabet $Y = X$ und möglichst wenig Zuständen an, der jede Eingabe $w \in X^+$ *gerader Länge* übersetzt in die Ausgabe $g^{**}(w) = B(w)$. Was der Automat für Eingaben ungerader Länge ausgibt, ist gleichgültig.
c) Geben Sie explizit an, welchen Wert man erhält, wenn man auf eine Eingabe w gerader Länge iteriert $|w|$ mal B anwendet.
(Hinweis: Die Notation $N_x(w)$ aus Kapitel 8 ist vermutlich hilfreich.)
d) Gibt es einen endlichen Automaten, der die Funktion $w \mapsto B^{|w|}(w)$ aus Teilaufgabe c) berechnet?
e) Begründen Sie Ihre Antwort aus Teilaufgabe d)!

Aufgabe 11.4 (2+3=5 Punkte)
Konstruieren Sie für jede folgenden formalen Sprachen $L_i \subseteq \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ jeweils einen endlichen Akzeptor A_i mit $L(A_i) = L_i$.

a) $L_1 = \{w \in X^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } \mathtt{aab}\}$

b) $L_2 = \{w \in X^* \mid w \notin L_1\}$