Grundbegriffe der Informatik
Lösungsvorschläge Aufgabenblatt 12

Matr.nr.:							

Nachname:

Vorname:

Tutorium: Nr. Name des Tutors:

Ausgabe: 22. Januar 2014

Abgabe: 31. Januar 2014, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengetackert

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 12:	/ 20
Blätter 1 – 12:	/ 220

Aufgabe 12.1 (4 Punkte)
Beweisen Sie, dass es keinen endlichen Akzeptor A gibt, für den gilt:
$L(A) = \{vv \mid v \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^*\}$.

Lösung 12.1
Das folgende Vorgehen ist ähnlich dem in der Vorlesung für die Sprache $\{\mathtt{a}^k\mathtt{b}^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$.
Es sei $L' = \{vv \mid v \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^*\}$ und $A = (Z, \dots)$ ein Akzeptor mit $L' \subseteq L(A)$. Wir zeigen, dass dann *nicht* $L(A) \subseteq L'$ gilt. Dazu betrachten wir das Wort $\mathtt{a}^m\mathtt{b}$, wobei $m = |Z|$ die Anzahl der Zustände des Akzeptors A sei. Für $0 \leq i \leq m$ sei $z_i = f^*(z_0, \mathtt{a}^i)$ der ausgehend vom Anfangszustand z_0 nach Eingabe von $\mathtt{a}^i$ erreichte Zustand. Die Liste $(z_0, \dots, z_m)$ umfasst mehr Zustände als A verschiedene hat. Also gibt es i und j mit $0 \leq i < j \leq m$ und $z_i = z_j$.
Dann ist aber

$$\begin{aligned}
& f^*(z_0, \mathtt{a}^i) = f^*(z_0, \mathtt{a}^j) \\
\text{also auch}\quad & f^*(z_0, \mathtt{a}^{i+(m-j)}) = f^*(z_0, \mathtt{a}^{j+(m-j)}) \\
\text{also auch}\quad & f^*(z_0, \mathtt{a}^{i+(m-j)}\mathtt{b}\mathtt{a}^m\mathtt{b}) = f^*(z_0, \mathtt{a}^{j+(m-j)}\mathtt{b}\mathtt{a}^m\mathtt{b}) \\
\text{also auch}\quad & f^*(z_0, \mathtt{a}^{m+(i-j)}\mathtt{b}\mathtt{a}^m\mathtt{b}) = f^*(z_0, \mathtt{a}^m\mathtt{b}\mathtt{a}^m\mathtt{b})
\end{aligned}$$

Da $\mathtt{a}^m\mathtt{b}\mathtt{a}^m\mathtt{b} \in L'$ ist, ist der Zustand auf der rechten Seite der letzten Gleichung akzeptierend. Also akzeptiert A auch das Wort $\mathtt{a}^{m+(i-j)}\mathtt{b}\mathtt{a}^m\mathtt{b}$, das aber *nicht* in L' ist.

Aufgabe 12.2 (1+3=4 Punkte)

a) Für welche formalen Sprachen L gibt es jeweils unendlich viele reguläre Ausdrücke R mit $\langle R \rangle = L$?
b) Beweisen Sie Ihre Aussage aus Teilaufgabe a).

Lösung 12.2

a) Für alle regulären Sprachen, also für alle Sprachen, für die es überhaupt einen regulären Ausdruck gibt.
b) Die Implikation „Wenn L durch unendlich viele reguläre Ausdrücke beschreibbar ist, dann ist L durch mindestens einen regulären Ausdruck beschreibbar" ist trivial.
   Umgekehrte Richtung: Es sei ein L durch mindestens einen regulären Ausdruck R beschreibbar. Dann beschreiben auch die folgenden regulären Ausdrücke R_n alle L:

$$\begin{gathered}
R_0 = R \\
\forall n \in \mathbb{N}_0\colon R_{n+1} = R \mid R_n
\end{gathered}$$

   Beweis durch Induktion: $\langle R_0 \rangle = L$ ist klar. Und $\langle R_{n+1} \rangle = \langle R \rangle \cup \langle R_n \rangle \overset{IV}{=} L \cup L = L$.

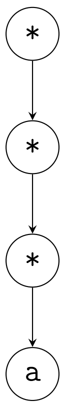
Aufgabe 12.3 (1+1 Punkte)

a) Zeichnen Sie den Regex-Baum für `a***`.

b) Geben Sie für die Sprache $L = \{\texttt{bbbbbb}\}$ einen regulären Ausdruck R mit $\langle R \rangle = L$ an, für den der Regex-Baum möglichst niedrig ist.

Lösung 12.3

a)



b) `(bbb)(bbb)`

Aufgabe 12.4 (2+3=5 Punkte)

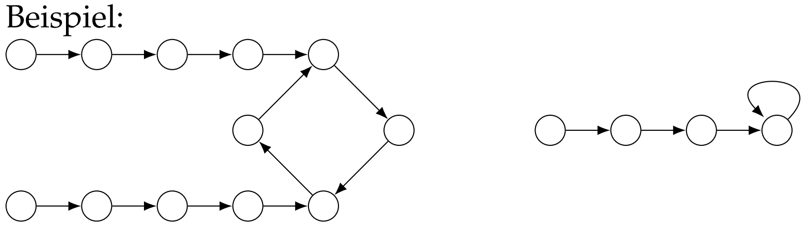
Es sei $A = (Z, z_0, X, F, f)$ ein endlicher Akzeptor mit Zustandsmenge $Z = \{z_0, \ldots, z_{k-1}\}$ und Eingabealphabet $X = \{\texttt{a}\}$.

a) Beschreiben Sie, welches charakteristische Aussehen im allgemeinen der Zustandsgraph eines solchen Akzeptors hat.

b) Beschreiben Sie, wie für einen solchen Akzeptor im allgemeinen ein „einfach strukturierter“ regulärer Ausdruck R aussehen kann, für den gilt: $\langle R \rangle = L$.

Lösung 12.4

a) Da klar ist, dass alle Kanten mit a beschriftet sind, lassen wir nachfolgend die Beschriftungen bei den Argumentationen und Bildern einfach weg.
Der Graph enthält mindestens einen einfachen Zyklus (evtl. Schlinge), unter Umständen auch mehrere. Unter Umständen gibt es auch noch Knoten mit Eingangsgrad 0. Von jedem von ihnen führt ein gerichteter Pfad zu einem Knoten, der zu einem der einfachen Zyklen gehört.
Beispiel:



b) Für den regulären Ausdruck kann man sich auf den Teil des Zustandsgraphen beschränken, der vom Anfangszustand aus erreichbar ist. Dann hat man nur noch einen einfachen Zyklus, zu dem unter Umständen vom Anfangszustand aus ein gerichteter Pfad „hinführt".

Der Einfachheit halber stellen wir uns vor, die Zustände seien ausgehend vom Anfangszustand z_0 entlang der Kanten aufsteigend durchnummeriert (also $z_i = f^*(z_0, \mathtt{a}^i)$; ansonsten würden wir einfach neuen Bezeichnungen $\bar{z}_0, \dots, \bar{z}_{n-1}$ einführen). Es sei ℓ die kleinste Nummer eines Zustands auf dem einfachen Zyklus (unter Umständen also $\ell = 0$). Die Gesamtzahl der Zustände sei n. Folglich hat der einfache Zyklus Länge $n - \ell$.

Einige der Zustände sind akzeptierend.

- Es sei $k \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der akzeptierenden Zustände mit Nummern echt kleiner als ℓ, und falls $k \geq 1$ seien $x_0, \dots, x_{k-1}$ die Nummern dieser Zustände.
- Es sei $m \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der akzeptierenden Zustände mit Nummern größer oder gleich ℓ, und falls $k \geq 1$ seien $y_0, \dots, y_{m-1}$ die Nummern dieser Zustände.

Mit anderen Worten ist $F = \{z_{x_i} \mid 0 \leq i < k\} \cup \{z_{y_i} \mid 0 \leq i < m\}$.

Dann wird $L(A)$ durch den regulären Ausdruck mit der Struktur $X\mathtt{|}Y$ beschrieben, wobei die regulären Ausdrücke X und Y so festgelegt seien:

$$X = \begin{cases} \mathtt{(a}^{x_0}\mathtt{|} \cdots \mathtt{|a}^{x_{k-1}}\mathtt{)} & \text{falls } k > 0 \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} \mathtt{((a}^{y_0}\mathtt{|} \cdots \mathtt{|a}^{y_{m-1}}\mathtt{)(a}^{n-\ell}\mathtt{)*)} & \text{falls } m > 0 \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist gegebenenfalls unter $\mathtt{a}^0$ der reguläre Ausdruck $\emptyset\mathtt{*}$ zu verstehen.

Aufgabe 12.5 (2+3=5 Punkte)

Konstruieren Sie für jede der folgenden formalen Sprachen $L_i \subseteq \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ jeweils einen regulären Ausdruck R_i mit $\langle R_i \rangle = L_i$.

a) $L_1 = \{w \in X^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } \mathtt{aab}\}$

b) $L_2 = \{w \in X^* \mid w \notin L_1\}$

Lösung 12.5

a) `(a|b)*aab(a|b)*`

b) `(ab|b)*a*`