Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 2

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.
	Name des Tutors:
Ausgabe:	30. Oktober 2013
Abgabe:	8. November 2013, 12:30 Uhr im GBI-Briefkasten im Untergeschoss von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 2:	/ 20
Blätter 1 – 2:	/ 36

Aufgabe 2.1 (1+1+2=4 Punkte)
Es sei A ein beliebiges Alphabet. Beweisen Sie unter Verwendung der Definition von Potenzen von Wörtern, der Ergebnisse aus der Vorlesung und der Assoziativität der Konkatenation von Wörtern, dass für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ und alle Wörter $w \in A^*$ gilt:

a) $w^n \cdot w^0 = w^{n+0}$
b) $w^n \cdot w^1 = w^{n+1}$
c) $w^n \cdot w^2 = w^{n+2}$

Rechnen Sie bitte in allen drei Fällen ausführlich!

Lösung 2.1
In allen drei Fällen seien n und w beliebig aber fest.

a) $w^n \cdot w^0 = w^n \cdot \varepsilon = w^n = w^{n+0}$
b) $w^n \cdot w^1 = w^n \cdot w = w^{n+1}$
c) $w^n \cdot w^2 = w^n \cdot (w \cdot w) = (w^n \cdot w) \cdot w = w^{n+1} \cdot w = w^{(n+1)+1} = w^{n+2}$

Aufgabe 2.2 (1+2=3 Punkte)
Bei den beiden folgenden Teilaufgaben müssen M und $\diamond$ nur die geforderten Eigenschaften haben. Alles andere ist egal.

a) Geben Sie eine Menge M und eine binäre Operation $\diamond\colon M \times M \to M$ an, die nicht kommutativ ist. Geben Sie konkrete Werte $x, y \in M$ an, mit deren Hilfe man belegen kann, dass $\diamond$ nicht kommutativ ist.
b) Geben Sie eine Menge M und eine binäre Operation $\diamond\colon M \times M \to M$ an, die zwar kommutativ aber nicht assoziativ ist. Geben Sie konkrete Werte $x, y, z \in M$ an, mit deren Hilfe man belegen kann, dass $\diamond$ nicht assoziativ ist.

Lösung 2.2

a) $M = \mathbb{Z}$ und $x \diamond y = x - y$. Dann ist $1 \diamond 2 = 1 - 2 = -1 \neq 1 = 2 - 1 = 2 \diamond 1$.
b) $M = \mathbb{N}_0$ und $x \diamond y = |x - y|$. Dann ist zum Beispiel

$$\begin{aligned} (1 \diamond 2) \diamond 3 &= ||1-2|-3| = |1-3| = 2 \\ \text{aber } 1 \diamond (2 \diamond 3) &= |1-|2-3|| = |1-1| = 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.3 (1+1+1+1+2=6 Punkte)
Gegeben sei das Alphabet $A = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ und die Abbildung $f\colon A^+ \to A^+$, die wie folgt „arbeitet“: Aus einem nichtleeren Wort w entsteht $f(w)$, indem man

- jede `0` in w durch das Wort `01` ersetzt und
- jede `1` in w durch eine `0`.

Zum Beispiel ist $f(\mathtt{0010}) = \mathtt{0101001}$.

a) Es sei $w_0 = \mathtt{0}$. Geben Sie die folgenden Wörter explizit an:
• $w_1 = f(w_0)$ • $w_2 = f(w_1)$ • $w_3 = f(w_2)$ • $w_4 = f(w_3)$ • $w_5 = f(w_4)$

b) Geben Sie $f(\mathtt{10})$, $f(\mathtt{11})$ und $f(\mathtt{1011})$ an.

c) Es seien $v \in A^+$ und $v' \in A^+$ zwei Wörter. Was können Sie aufgrund der „Arbeitsweise“ von f über den Funktionswert $f(vv')$ aussagen?

d) Was fällt Ihnen an den Wörtern $w_0, \dots, w_5$ auf?

e) Beweisen Sie: Wenn v Anfangsstück des Wortes $f(v)$ ist, dann ist auch $f(v)$ Anfangsstück des Wortes $f(f(v))$.

Lösung 2.3

a)
- $w_1 = \mathtt{01}$
- $w_2 = \mathtt{010}$
- $w_3 = \mathtt{01001}$
- $w_4 = \mathtt{01001010}$
- $w_5 = \mathtt{0100101001001}$

b)
- $f(\mathtt{10}) = \mathtt{001}$
- $f(\mathtt{11}) = \mathtt{00}$
- $f(\mathtt{1011}) = \mathtt{00100}$

c) $f(vv') = f(v)f(v')$

d) Für $0 \leq i \leq 4$ ist w_i Präfix von w_{i+1}.
Oder: Die Anzahl der Nullen (bzw. Einsen) in w_{i+2} ist die Summe der Nullen (bzw. Einsen) in w_i und w_{i+1}.

e) Es sei v Anfangsstück des Wortes $f(v)$. Dann ist also $f(v) = vv'$ für ein Wort $v' \in A^*$.
Wegen Teilaufgabe c) ist $f(f(v)) = f(vv') = f(v)f(v') \ \big(= f(v)v'' \big)$, also ist offensichtlich $f(v)$ Präfix von $f(f(v))$.

Aufgabe 2.4 (2+1+1+2+1=7 Punkte)
Es sei M eine beliebige nichtleere Menge und $f\colon M \to M$ eine Abbildung auf M. Eine Folge von Teilmengen $T_n \subseteq M$ für $n \in \mathbb{N}_0$ ist induktiv wie folgt definiert:

$$T_0 = M$$
$$\forall n \in \mathbb{N}_0\colon T_{n+1} = \{f(x) \mid x \in T_n\}$$

a) Wählen Sie $M = \mathbb{G}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$.

- Geben Sie eine Abbildung $f\colon \mathbb{G}_4 \to \mathbb{G}_4$ an, bei der alle Mengen T_n gleich sind.
- Geben Sie eine Abbildung $f\colon \mathbb{G}_4 \to \mathbb{G}_4$ an, bei der *nicht* alle Mengen T_n gleich sind. Geben Sie bitte alle Teilmengen von $\mathbb{G}_4$ an, die vorkommen.

b) Wählen Sie $M = \mathbb{N}_0$ und geben eine Abbildung f an, so dass

- die Mengen T_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$ unendlich groß sind und

- außerdem gilt: $\forall n \in \mathbb{N}_0\colon T_{n+1} \subsetneq T_n$. Das Zeichen $\subsetneq$ bedeutet, dass T_{n+1} Teilmenge von T_n ist, aber nicht gleich T_n ist, also echt kleiner.

(Anmerkung: Manchmal schreibt man statt $\subsetneq$ auch $\subsetneqq$.)

c) Angenommen, man weiß schon, dass für eine bestimmte fest Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass $T_{k+1} \subseteq T_k$ ist. Beweisen Sie, dass dann auch $T_{k+2} \subseteq T_{k+1}$ ist.

d) Angenommen, man weiß schon, dass für eine bestimmte fest Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass $T_{k+1} = T_k$ ist. Beweisen Sie, dass dann auch $T_{k+2} = T_{k+1}$ ist.

e) Angenommen M ist eine *endliche* Menge mit genau k Elementen. Was können Sie über die Menge T_k aussagen?

Lösung 2.4

a) Sei $M = \mathbb{G}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$.

- wähle als f die Identität $f\colon \mathbb{G}_4 \to \mathbb{G}_4\colon x \mapsto x$
- wähle als f die Abbildung $f\colon \mathbb{G}_4 \to \mathbb{G}_4\colon x \mapsto 0$
  Dann ist $T_0 = \mathbb{G}_4$ und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $T_{n+1} = \{0\}$.

b) Sei $M = \mathbb{N}_0$ und $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0\colon x \mapsto x + 1$.

Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$ nämlich $T_n = \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x \geq n\} = \mathbb{N}_0 \setminus \mathbb{G}_n$.

c) Es sei $k \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige Zahl mit $T_{k+1} \subseteq T_k$. Dann ist

$$\begin{aligned} T_{k+2} &= \{f(x) \mid x \in T_{k+1}\} && \text{Definition von } T_{k+2} \\ &\subseteq \{f(x) \mid x \in T_k\} && \text{mehr Werte da } T_{k+1} \subseteq T_k \\ &= T_{k+1} && \text{Definition von } T_{k+1} \end{aligned}$$

d) Es sei $k \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige Zahl mit $T_{k+1} = T_k$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned} T_{k+2} &= \{f(x) \mid x \in T_{k+1}\} && \text{Definition von } T_{k+2} \\ &= \{f(x) \mid x \in T_k\} && \text{da } T_{k+1} = T_k \\ &= T_{k+1} && \text{Definition von } T_{k+1} \end{aligned}$$

e) $T_k = T_{k+1}$; für $k \geq 1$ ist auch schon $T_{k-1} = T_k$.