Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 3

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.	Name des Tutors:

Ausgabe: 6. November 2013

Abgabe: 15. November 2013, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 3:	/ 18
Blätter 1 – 3:	/ 54

Aufgabe 3.1 (1+1=2 Punkte)
Es sei A ein Alphabet und $L \subseteq A^*$.

a) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass L^* endlich ist.
b) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass $L^* = A^*$ ist.

Aufgabe 3.2 (1+1+2+2=6 Punkte)
Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Beschreiben Sie jede der folgenden formalen Sprachen $L_i \subseteq A^*$ durch einen Ausdruck, in dem nur die Zeichen

$$\mathtt{a} \quad \mathtt{b} \quad \{ \quad \} \quad , \quad \cup \quad \cdot \quad {}^*$$

(unter Umständen mehrfach) vorkommen.

a) L_1: alle Wörter, in denen mindestens ein `a` und mindestens ein `b` vorkommt
b) L_2: alle Wörter, in denen nirgends ein `a` vorkommt
c) L_3: alle Wörter, in denen nirgends das Teilwort `bb` vorkommt
d) L_4: alle Wörter, in denen nirgends das Teilwort `aab` vorkommt

Aufgabe 3.3 (1+1+2=4 Punkte)
Eine Zahl $p \in \mathbb{N}_0$ heißt *Primzahl* (oder kurz *prim*), wenn $p \geq 2$ ist und nicht als Produkt zweier Zahlen $r, s \in \mathbb{N}_0$ geschrieben werden kann, die beide *echt* kleiner als p sind. Mit anderen Worten: p ist prim, wenn 1 und p die einzigen positiven Teiler von p sind.
Es sei $A = \{\mathtt{a}\}$ und $P \subseteq A^*$ die formale Sprache $P = \{\mathtt{a}^p \mid p \text{ ist prim}\}$.

a) Gibt es eine formale Sprache $L \subseteq A^*$ mit der Eigenschaft $L^* = P$?
b) Gibt es eine formale Sprache $L \subseteq A^*$ mit der Eigenschaft $L^+ = P$?
c) Beweisen Sie Ihre Antwort aus Teilaufgabe b).

Aufgabe 3.4 (4 Punkte)
Für nichtnegative ganze Zahlen $k, n \in \mathbb{N}_0$ benutzen wir im folgenden die Schreibweise „$k|n$“ um auszudrücken, dass k ein Teiler von n ist, d. h. dass ein $m \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $k \cdot m = n$.
Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \colon 3 \mid (n^3 - n) \; .$$

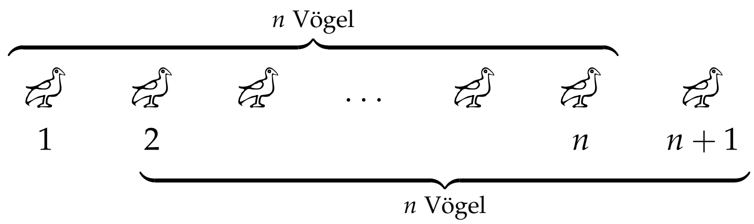
Aufgabe 3.5 (2 Punkte)
Wo steckt der Fehler in dem folgenden „Induktionsbeweis“:
Zu zeigen ist die Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt: In jeder Menge, die genau n Vögel enthält, haben alle Vögel die gleiche Farbe.

Induktionsanfang $n = 1$: Wenn eine Menge genau 1 Vogel enthält, dann haben offensichtlich alle Vögel die gleiche Farbe.

Induktionsschritt $n \to n+1$:

Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges aber festes n gelte: In jeder Menge, die genau n Vögel enthält, haben alle Vögel die gleiche Farbe.

Induktionsschluss: Man zeige die Aussage für $n+1$: Sei also M eine Menge, die genau $n+1$ Vögel enthalte. Man stelle sich vor, dass die Vögel alle nebeneinander sitzen:



Die Vögel $1, 2, \ldots, n$ bilden eine Menge mit genau n Vögeln. Also haben sie nach Induktionsvoraussetzung alle die gleiche Farbe. Die Vögel $2, 3, \ldots, n+1$ bilden auch eine Menge mit genau n Vögeln. Also haben nach Induktionsvoraussetzung auch diese alle die gleiche Farbe.

Folglich haben auch die Vögel 1 und $n+1$ die gleiche Farbe, also haben alle Vögel die gleiche Farbe.