Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 3

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr. Name des Tutors:

Ausgabe: 6. November 2013

Abgabe: 15. November 2013, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 3:	/ 18
Blätter 1 – 3:	/ 54

Aufgabe 3.1 (1+1=2 Punkte)
Es sei A ein Alphabet und $L \subseteq A^*$.

a) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass L^* endlich ist.
b) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass $L^* = A^*$ ist.

Lösung 3.1

a) $L = \{\}$ oder $L = \{\varepsilon\}$.
b) $A \subseteq L$

Aufgabe 3.2 (1+1+2+2=6 Punkte)
Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Beschreiben Sie jede der folgenden formalen Sprachen $L_i \subseteq A^*$ durch einen Ausdruck, in dem nur die Zeichen

$$\mathtt{a} \quad \mathtt{b} \quad \{ \quad \} \quad , \quad \cup \quad \cdot \quad {}^*$$

(unter Umständen mehrfach) vorkommen.

a) L_1: alle Wörter, in denen mindestens ein a und mindestens ein b vorkommt
b) L_2: alle Wörter, in denen nirgends ein a vorkommt
c) L_3: alle Wörter, in denen nirgends das Teilwort bb vorkommt
d) L_4: alle Wörter, in denen nirgends das Teilwort aab vorkommt

Lösung 3.2
Für jeden der Fälle gibt es viele Lösungsmöglichkeiten.
Nachfolgend einige Beispiele:

a) $L_1 = \{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{ab}\}\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \cup \{\mathtt{b}\}^*\{\mathtt{ba}\}\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$
b) $L_2 = \{\mathtt{b}\}^*$
c) L_3: eine mögliche Herangehensweise: Wörter, in denen nirgends das Teilwort bb vorkommt, haben die Eigenschaft, dass gar kein b vorkommt, oder wenn doch, vor jedem b mit Ausnahme des ersten, mindestens ein a steht:
$L_3 = \{\mathtt{a}\}^* \cup \{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}, \mathtt{ab}\}^*$
d) L_4: eine mögliche Herangehensweise: Wörter, in denen nirgends das Teilwort aab vorkommt, haben die Eigenschaft, dass vor jedem b höchstens ein a kommt. Daher:
$L_4 = \{\mathtt{ab}, \mathtt{b}\}^*\{\mathtt{a}\}^*$.

Aufgabe 3.3 (1+1+2=4 Punkte)
Eine Zahl $p \in \mathbb{N}_0$ heißt *Primzahl* (oder kurz *prim*), wenn $p \geq 2$ ist und nicht als Produkt zweier Zahlen $r, s \in \mathbb{N}_0$ geschrieben werden kann, die beide *echt* kleiner als p sind. Mit anderen Worten: p ist prim, wenn 1 und p die einzigen positiven Teiler von p sind.
Es sei $A = \{\mathtt{a}\}$ und $P \subseteq A^*$ die formale Sprache $P = \{\mathtt{a}^p \mid p \text{ ist prim}\}$.

a) Gibt es eine formale Sprache $L \subseteq A^*$ mit der Eigenschaft $L^* = P$?

b) Gibt es eine formale Sprache $L \subseteq A^*$ mit der Eigenschaft $L^+ = P$?
c) Beweisen Sie Ihre Antwort aus Teilaufgabe b).

Lösung 3.3

a) Nein.
(nicht geforderte Erklärung: $\varepsilon \in L^*$ aber 0 nicht prim)
b) Nein.
c) Indirekter Beweis: Angenommen für ein L gilt $L^+ = P$. Da 2 prim ist, muss dann $\mathtt{aa}$ in L^+ sein. Das geht nur, wenn $\mathtt{a} \in L$ oder $\mathtt{aa} \in L$. In beiden Fällen ist dann $\mathtt{aaaa} \in L^+$, aber 4 ist nicht prim. Widerspruch zur Annahme $L^+ = P$.

Aufgabe 3.4 (4 Punkte)

Für nichtnegative ganze Zahlen $k, n \in \mathbb{N}_0$ benutzen wir im folgenden die Schreibweise „$k|n$" um auszudrücken, dass k ein Teiler von n ist, d. h. dass ein $m \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $k \cdot m = n$.
Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \colon 3 \mid (n^3 - n) \; .$$

Lösung 3.4

Induktionsanfang: $n = 0$:
Dann ist $n^3 - n = 0^3 - 0 = 0 = 3 \cdot 0$, also gilt $3 \mid 0^3 - 0$.

Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges aber festes n gelte: $3 \mid (n^3 - n)$, es gebe also ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $3 \cdot m = n^3 - n$

Induktionsschluss $n \rightsquigarrow n+1$: zu zeigen ist: $3 \mid ((n+1)^3 - (n+1))$, d. h. es gibt ein $m' \in \mathbb{N}_0$ mit $3 \cdot m' = ((n+1)^3 - (n+1))$.

Man rechnet:

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\
&= n^3 - n + 3(n^2 + n) \\
&= 3m + 3(n^2 + n) && \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\
&= 3(m + n^2 + n)
\end{aligned}$$

Also hat $(n+1)^3 - (n+1)$ den Teiler 3 (m.a.W. $m' = m + n^2 + n$).

Aufgabe 3.5 (2 Punkte)

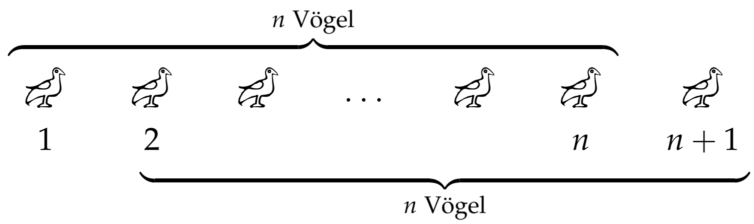
Wo steckt der Fehler in dem folgenden „Induktionsbeweis":
Zu zeigen ist die Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt: In jeder Menge, die genau n Vögel enthält, haben alle Vögel die gleiche Farbe.

Induktionsanfang $n = 1$: Wenn eine Menge genau 1 Vogel enthält, dann haben offensichtlich alle Vögel die gleiche Farbe.

Induktionsschritt $n \to n + 1$:

Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges aber festes n gelte: In jeder Menge, die genau n Vögel enthält, haben alle Vögel die gleiche Farbe.

Induktionsschluss: Man zeige die Aussage für $n + 1$: Sei also M eine Menge, die genau $n + 1$ Vögel enthalte. Man stelle sich vor, dass die Vögel alle nebeneinander sitzen:



Die Vögel $1, 2, \ldots, n$ bilden eine Menge mit genau n Vögeln. Also haben sie nach Induktionsvoraussetzung alle die gleiche Farbe. Die Vögel $2, 3, \ldots, n + 1$ bilden auch eine Menge mit genau n Vögeln. Also haben nach Induktionsvoraussetzung auch diese alle die gleiche Farbe.

Folglich haben auch die Vögel 1 und $n + 1$ die gleiche Farbe, also haben alle Vögel die gleiche Farbe.

Lösung 3.5

Das Bild ist zwar außerordentlich hübsch, suggeriert aber leider etwas, was nicht immer stimmt: Für $n = 2$ überlappen sich die Teilmengen „ohne den ersten" und „ohne den letzten" Vogel *nicht*. Es ist also nicht erzwungen, dass beide Vögel die gleiche Farbe haben.

(Und das macht „alles weitere" auch kaputt: Wenn nicht immer 2 Vögel die gleiche Farbe haben, dann auch nicht immer 3 Vögel, usw.)