Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 4

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.
	Name des Tutors:

Ausgabe: 14. November 2013

Abgabe: 22. November 2013, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 4:	/ 18
Blätter 1 – 4:	/ 72

Aufgabe 4.1 (5 Punkte)
Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Eine Folge L_n formaler Sprachen sei wie folgt definiert:

$$L_0 = \{\varepsilon\}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \colon L_{n+1} = \{\mathtt{a}\} \cdot L_n \cdot \{\mathtt{b}\}$$

Außerdem sei $L = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$.
Beweisen Sie (im Kern durch vollständige Induktion) die Aussage

$$\forall w \in L \colon \exists i \in \mathbb{N}_0 \colon w = \mathtt{a}^i \mathtt{b}^i$$

Aufgabe 4.2 (1+1+4=6 Punkte)
Gegeben sei das Alphabet $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Für jedes $y \in A$ wird eine Abbildung U_y wie folgt definiert:

$$U_y(\varepsilon) = \varepsilon$$
$$\forall w \in A^* \colon \forall x \in A \colon U_y(wx) = yU_y(w)$$

a) Geben $U_{\mathtt{a}}(\mathtt{babbba})$ explizit an und beschreiben Sie anschaulich, was im allgemeinen U_y als Ergebnis liefert.
b) Geben Sie eine explizite Formel für $U_y(w)$ an.
c) Beweisen Sie die Richtigkeit Ihrer Formel aus Teilaufgabe b) durch vollständige Induktion über die Wortlänge (was das ist, wird in der großen Übung am 15.11. erklärt).

Aufgabe 4.3 (1+1+1+1+3=7 Punkte)
Die beiden Funktionen **inc** und **dec** von $\mathbb{N}_0$ nach $\mathbb{N}_0$ seien wie folgt definiert:

$$\mathbf{inc}(0) = 1 \qquad \mathbf{dec}(0) = 0$$
$$\forall x \in \mathbb{N}_0 \colon \mathbf{inc}(x+1) = \mathbf{inc}(x) + 1 \qquad \mathbf{dec}(x+1) = x$$

Außerdem sei die binäre Operation $\dot{-} \colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ für alle $x, y \in \mathbb{N}_0$ definiert durch die Feslegung

$$x \mathbin{\dot{-}} y = \begin{cases} x - y & \text{falls } x > y \\ 0 & \text{falls } x \leq y \end{cases} .$$

a) Drücken Sie die Funktion **dec** mit Hilfe der Operation $\dot{-}$ aus.
b) Welche Funktion wird durch den Ausdruck $1 \mathbin{\dot{-}} (x \mathbin{\dot{-}} y)$ berechnet?
c) Geben Sie einen „arithmetischen" Ausdruck an, in dem nur Konstanten, die Variablen x und y und die binären Operationen $+$ und $\dot{-}$ vorkommen, und der als Wert $\min(x, y)$ liefert.
d) Rechnen Sie nach, dass stets $(a \mathbin{\dot{-}} z) \mathbin{\dot{-}} 1 = a \mathbin{\dot{-}} (z+1)$ ist (für alle $a, z \in \mathbb{N}_0$). Hinweis: Es ist unter Umständen hilfreich, die Definition von $\dot{-}$ mit Hilfe einer Fallunterscheidung aufzuschreiben.

e) Im folgenden Algorithmus seien $a \in \mathbb{N}_0$ und $b \in \mathbb{N}_0$ beliebige nichtnegative ganze Zahlen.

$x \leftarrow a$
$z \leftarrow 0$
// Z_1
for $i \leftarrow 0$ **to** $b - 1$ **do**
    // Z_2
    $x \leftarrow \mathbf{dec}(x)$
    // Z_3
    $z \leftarrow \mathbf{inc}(z)$
    // Z_2
od
// $Z_4 : x = a \dot{-} b$

Finden Sie Zusicherungen für die Stellen Z_1, Z_2 und Z_3 (also Aussagen, die an den betreffenden Stellen wahr sind) aus denen man ablesen kann, dass am Ende des Algorithmus Zusicherung Z_4 wahr ist.
Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass im Fall $b = 0$ die Schleife überhaupt nicht durchlaufen wird. Dann muss „sofort“ Z_4 gelten.