Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 4

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.
	Name des Tutors:

Ausgabe: 14. November 2013

Abgabe: 22. November 2013, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 4:	/ 18
Blätter 1 – 4:	/ 72

Aufgabe 4.1 (5 Punkte)
Es sei $A = \{\texttt{a}, \texttt{b}\}$. Eine Folge L_n formaler Sprachen sei wie folgt definiert:

$$L_0 = \{\varepsilon\}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \colon L_{n+1} = \{\texttt{a}\} \cdot L_n \cdot \{\texttt{b}\}$$

Außerdem sei $L = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$.
Beweisen Sie (im Kern durch vollständige Induktion) die Aussage

$$\forall w \in L \colon \exists i \in \mathbb{N}_0 \colon w = \texttt{a}^i\texttt{b}^i$$

Lösung 4.1
Beweis in 2 Schritten;

Schritt 1: Wir zeigen zunächst durch vollständige Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \colon \forall w \in L_n \colon w = \texttt{a}^n\texttt{b}^n$$

Induktionsanfang: $n = 0$: $w \in L_0 = \{\varepsilon\} \Longrightarrow w = \varepsilon = \texttt{a}^0\texttt{b}^0$

Induktionsvoraussetzung: für ein beliebiges aber festes n gelte

$$\forall w \in L_n \colon w = \texttt{a}^n\texttt{b}^n$$

Induktionsschluss: $n \rightsquigarrow n+1$: zu zeigen:

$$\forall w \in L_{n+1} \colon w = \texttt{a}^{n+1}\texttt{b}^{n+1}$$

Wenn $w \in L_{n+1} = \{\texttt{a}\} \cdot L_n \cdot \{\texttt{b}\}$, dann ist w von der Form $w = \texttt{a}w'\texttt{b}$ mit $w' \in L_n$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $w' = \texttt{a}^n\texttt{b}^n$, also ist $w = \texttt{a}\texttt{a}^n\texttt{b}^n\texttt{b} = \texttt{a}^{n+1}\texttt{b}^{n+1}$.

Hinweis: Alternativ kann man z. B. auch zeigen: $\forall n \in \mathbb{N}_0 \colon L_n = \{\texttt{a}^n\texttt{b}^n\}$.

Schritt 2: Es sei nun $w \in L$ beliebig aber fest. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $w \in L_n$ und folglich ist nach dem eben gezeigten $w = \texttt{a}^n\texttt{b}^n$ wie gefordert.

Aufgabe 4.2 (1+1+4=6 Punkte)
Gegeben sei das Alphabet $A = \{\texttt{a}, \texttt{b}\}$. Für jedes $y \in A$ wird eine Abbildung U_y wie folgt definiert:

$$U_y(\varepsilon) = \varepsilon$$
$$\forall w \in A^* \colon \forall x \in A \colon U_y(wx) = yU_y(w)$$

a) Geben $U_{\texttt{a}}(\texttt{babbba})$ explizit an und beschreiben Sie anschaulich, was im allgemeinen U_y als Ergebnis liefert.
b) Geben Sie eine explizite Formel für $U_y(w)$ an.

c) Beweisen Sie die Richtigkeit Ihrer Formel aus Teilaufgabe b) durch vollständige Induktion über die Wortlänge (was das ist, wird in der großen Übung am 15.11. erklärt).

Lösung 4.2

a) `aaaaaa`
Allgemein: U_y ersetzt jedes Symbol des Arguments durch y.

b) $U_y(w) = y^{|w|}$

c) Zeige:
$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \colon \forall w \in A^n : U_y(w) = y^n$$

Induktionsanfang: $n = 0$: dann ist $w = \varepsilon$ und $U_y(w) = U_y(\varepsilon) = \varepsilon = y^0$.

Induktionsvoraussetzung: für ein beliebiges aber festes n gelte: $\forall w \in A^n :$ $U_y(w) = y^n$

Induktionsschritt: $n \rightsquigarrow n+1$: zu zeigen: $\forall w \in A^{n+1} \colon U_y(w) = y^{n+1}$, also $\forall w' \in A^n \colon \forall x \in A \colon U_y(w'x) = y^{n+1}$:
Es ist $U_y(w'x) = yU_y(w')$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $U_y(w') = y^n$, also $U_y(w'x) = yU_y(w') = yy^n = y^{n+1}$.

Aufgabe 4.3 **(1+1+1+1+3=7 Punkte)**
Die beiden Funktionen **inc** und **dec** von $\mathbb{N}_0$ nach $\mathbb{N}_0$ seien wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{inc}(0) &= 1 & \mathbf{dec}(0) &= 0 \\ \forall x \in \mathbb{N}_0 \colon \mathbf{inc}(x+1) &= \mathbf{inc}(x) + 1 & \mathbf{dec}(x+1) &= x \end{aligned}$$

Außerdem sei die binäre Operation $\dot{-} \colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ für alle $x, y \in \mathbb{N}_0$ definiert durch die Feslegung

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & \text{falls } x > y \\ 0 & \text{falls } x \le y \end{cases} .$$

a) Drücken Sie die Funktion **dec** mit Hilfe der Operation $\dot{-}$ aus.

b) Welche Funktion wird durch den Ausdruck $1 \dot{-} (x \dot{-} y)$ berechnet?

c) Geben Sie einen „arithmetischen" Ausdruck an, in dem nur Konstanten, die Variablen x und y und die binären Operationen $+$ und $\dot{-}$ vorkommen, und der als Wert $\min(x, y)$ liefert.

d) Rechnen Sie nach, dass stets $(a \dot{-} z) \dot{-} 1 = a \dot{-} (z+1)$ ist (für alle $a, z \in \mathbb{N}_0$).
Hinweis: Es ist unter Umständen hilfreich, die Definition von $\dot{-}$ mit Hilfe einer Fallunterscheidung aufzuschreiben.

e) Im folgenden Algorithmus seien $a \in \mathbb{N}_0$ und $b \in \mathbb{N}_0$ beliebige nichtnegative ganze Zahlen.

$$
\begin{array}{l}
x \leftarrow a \\
z \leftarrow 0 \\
/\!/ \; Z_1 \\
\textbf{for } i \leftarrow 0 \textbf{ to } b-1 \textbf{ do} \\
\qquad /\!/ \; Z_2 \\
\qquad x \leftarrow \textbf{dec}(x) \\
\qquad /\!/ \; Z_3 \\
\qquad z \leftarrow \textbf{inc}(z) \\
\qquad /\!/ \; Z_2 \\
\textbf{od} \\
/\!/ \; Z_4 : x = a \dot{-} b
\end{array}
$$

Finden Sie Zusicherungen für die Stellen Z_1, Z_2 und Z_3 (also Aussagen, die an den betreffenden Stellen wahr sind) aus denen man ablesen kann, dass am Ende des Algorithmus Zusicherung Z_4 wahr ist.
Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass im Fall $b = 0$ die Schleife überhaupt nicht durchlaufen wird. Dann muss „sofort“ Z_4 gelten.

Lösung 4.3

a) $\textbf{dec}(x) = x \dot{-} 1$

b) Es ist

$$1 \dot{-} (x \dot{-} y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x > y \\ 1 & \text{falls } x \leq y \end{cases}$$

c) $x \dot{-} (x \dot{-} y)$

d)

$$
\begin{aligned}
(a \dot{-} z) \dot{-} 1 &= \begin{cases} (a \dot{-} z) - 1 & \text{falls } a \dot{-} z \geq 1 \\ 0 & \text{falls } a \dot{-} z < 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (a \dot{-} z) - 1 & \text{falls } a - z \geq 1 \\ 0 & \text{falls } a \dot{-} z = 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (a - z) - 1 & \text{falls } a \geq z + 1 \\ 0 & \text{falls } a \leq z \end{cases} \\
&= \begin{cases} a - (z + 1) & \text{falls } a \geq z + 1 \\ 0 & \text{falls } a < z + 1 \end{cases} \\
&= a \dot{-} (z + 1)
\end{aligned}
$$

e) Im folgenden Algorithmus seien $a \in \mathbb{N}_0$ und $b \in \mathbb{N}_0$ beliebige nichtnegative ganze Zahlen.

$$
\begin{array}{l}
x \leftarrow a \\
z \leftarrow 0 \\
/\!/ \; x = a \dot{-} z \\
\textbf{for } i \leftarrow 0 \textbf{ to } b-1 \textbf{ do} \\
\qquad /\!/ \; x = a \dot{-} z \\
\qquad x \leftarrow \textbf{dec}(x) \\
\qquad /\!/ \; x = (a \dot{-} z) \dot{-} 1 \qquad \text{bzw.} \\
\qquad /\!/ \; x = a \dot{-} (z+1) \\
\qquad z \leftarrow \textbf{inc}(z) \\
\qquad /\!/ \; x = a \dot{-} z \\
\textbf{od} \\
/\!/ \; x = a \dot{-} b
\end{array}
$$

Wie man in der vorangegangenen Teilaufgabe gesehen hat, sind die beiden Zusicherungen in der Mitte des Schleifenrumpfes äquivalent.
Der Schleifenrumpf wird b mal ausgeführt, also ist am Ende $z = b$. Da $x = a \dot{-} z$ Schleifeninvariante ist, ergibt sich die letzte Zusicherung.