Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
15. September 2014

Klausur-nummer			

Nachname:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	8	8	6	8	4	9	7
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:		Note:	

Punkte

Aufgabe 1 (2 + 2 + 1 + 1 + 2 = 8 Punkte)

- Geben Sie zwei Funktionen $f\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ und $g\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ derart an, dass $f(n) \in \Theta(n^2)$, $g(n) \in \Theta(n^2)$ und $(f(n) - g(n)) \in \Theta(n)$.

- Geben Sie einen endlichen Akzeptor mit 641 Zuständen und Eingabealphabet $\{a, b\}$ an, der die formale Sprache $L = \{\}$ akzeptiert.

- Für welche Belegung mit Wahrheitswerten wird die aussagenlogische Formel $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ wahr?

- Geben Sie eine Menge M und eine totale Abbildung $f : M \to M$ an, die injektiv aber nicht surjektiv ist.

- Die Sprachen L_k, $k \in \mathbb{N}_0$, seien induktiv definiert durch

$$L_0 = \{a\},$$
$$\forall k \in \mathbb{N}_0\colon L_{k+1} = L_k^* L_k.$$

Geben Sie für jede nicht-negative ganze Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ die Sprache L_{k+1} ohne Bezug auf andere L_j, $j \in \mathbb{N}_0$, in Mengenschreibweise an.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 1:

Punkte

Aufgabe 2 (2 + 2 + 1 + 3 = 8 Punkte)

Es sei L_1 die formale Sprache

$$L_1 = \left\{ w \mid w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{.}, \mathtt{f}\}^* \land \exists w_1, w_2 \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^+ \colon w = w_1 \mathtt{.} w_2 \mathtt{f} \right\}.$$

a) Geben Sie einen regulären Ausdruck $\mathtt{R}$ derart an, dass $\langle \mathtt{R} \rangle = L_1$. Verwenden Sie in Ihrem regulären Ausdruck ausschließlich die Symbole `0`, `1`, `.`, `f`, `(`, `)`, `|`, `*` und `Ø`.

b) Geben Sie einen endlichen Akzeptor an, der die formale Sprache L_1 akzeptiert.

Es sei L_2 die formale Sprache über dem Alphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, die genau diejenigen $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ enthält, für die gilt:

- w beginnt mit einem `a` und
- w endet mit einem `b` und
- w enthält mindestens zwei `a` und
- w enthält mindestens zwei `b`.

c) Geben Sie drei Wörter an, die zu L_2 gehören, und drei Wörter, die nicht zu L_2 gehören.

d) Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der L_2 beschreibt.

Platz für Antworten zu Aufgabe 2:

Punkte

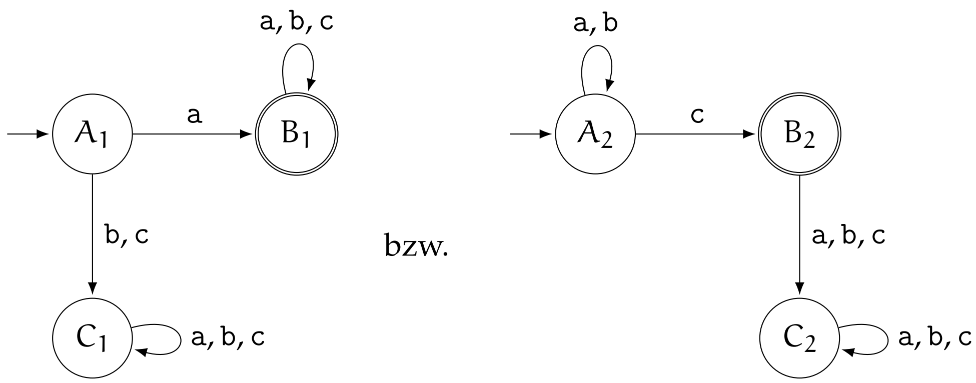
Aufgabe 3 (3 + 2 + 1 = 6 Punkte)

Gegeben seien zwei Akzeptoren $M_i = (Z_i, A_i, X_i, f_i, F_i)$, $i \in \{1, 2\}$. Deren *Produktakzeptor* $M_1 \times M_2$ ist festgelegt durch die Zustandsmenge $Z_1 \times Z_2$, den Anfangszustand (A_1, A_2), das Eingabealphabet $X_1 \cap X_2$, die Zustandsüberführungsfunktion

$$f\colon (Z_1 \times Z_2) \times (X_1 \cap X_2) \to Z_1 \times Z_2,$$
$$f((z_1, z_2), x) = (f_1(z_1, x), f_2(z_2, x)),$$

und die Menge $F_1 \times F_2$ als Menge der akzeptierenden Zustände.

a) Nachfolgend sind zwei Akzeptoren M_1 (links) und M_2 (rechts) graphisch dargestellt:



Geben Sie den Produktakzeptor $M_1 \times M_2$ graphisch an. Sie können dabei die Zustände, die nicht vom Anfangszustand erreichbar sind, weglassen.

b) Welche Sprachen werden von den drei Akzeptoren M_1, M_2 und $M_1 \times M_2$ der vorherigen Teilaufgabe akzeptiert?

c) Charakterisieren Sie die von einem Produktakzeptor $M_1 \times M_2$ akzeptierte Sprache $L(M_1 \times M_2)$ anhand der Sprachen $L(M_1)$ und $L(M_2)$. Nutzen Sie dabei ausschließlich die Mengenoperationen $\cup$, $\cap$ und $\times$.

Platz für Antworten zu Aufgabe 3:

Punkte

Aufgabe 4 (2 + 3 + 3 = 8 Punkte)

Gegeben sei für jede nicht-negative ganze Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ ein gerichteter Graph $T_k = (V_k, E_k)$ mit Knotenmenge

$$V_k = \{w \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \wedge |w| \leq k\}$$

und Kantenmenge

$$\begin{aligned} E_k = &\{(w_1, w_2) \mid w_1 \in V_k \wedge w_2 \in V_k \wedge \exists x \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}\colon w_2 = w_1 x\} \\ &\cup \{(w, w) \mid w \in V_k \wedge |w| = k\}. \end{aligned}$$

a) Zeichnen Sie T_0, T_1 und T_2.

b) Für welche nicht-negativen ganzen Zahlen $k \in \mathbb{N}_0$ ist die Relation E_k

- reflexiv?
- transitiv?
- symmetrisch?
- antisymmetrisch?

c) Geben sie die reflexiv-transitive Hülle E_k^* in Mengenschreibweise an.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 4:

Punkte

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Gegeben sei eine natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}_+$. Die Abbildung $S\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ sei induktiv definiert durch

$$S(0) = 1,$$
$$\forall k \in \mathbb{N}_0\colon S(k+1) = a^{k+1} + S(k).$$

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0\colon (a-1)S(k) = a^{k+1} - 1.$$

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 5:

Punkte

Aufgabe 6 (2 + 3 + 4 = 9 Punkte)

Gegeben sei die kontextfreie Grammatik G mit Nichtterminalsymbolen

$$N = \{S, Q, V, K, R\},$$

Terminalsymbolen

$$T = \{\,\forall\,,\ \exists\,,\ \mathbf{x}\,,\ \mathbf{y}\,,\ \mathbf{z}\,,\ (\,,\ )\,,\ \wedge\,,\ \vee\,,\ \Rightarrow\,,\ =\,,\ \leq\,\},$$

Startsymbol S und Produktionsmenge

$$\begin{aligned} P = \{\ & S \to QV(S) \mid (S)K(S) \mid VRV\,, \\ & Q \to \forall \mid \exists\,, \\ & V \to \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \mid \mathbf{z}\,, \\ & K \to \wedge \mid \vee \mid \Rightarrow\,, \\ & R \to\, = \mid \leq\,\}. \end{aligned}$$

a) Zeichnen Sie den Ableitungsbaum für das Wort

$$\forall\mathbf{x}(\exists\mathbf{y}(\mathbf{x} = \mathbf{y}))$$

b) Es bezeichne L die von G erzeugte formale Sprache L(G).
Beweisen Sie, dass

$$\{(\}\cdot L\cdot\{)\}\cdot\{\wedge,\vee,\Rightarrow\}\cdot\{(\}\cdot L\cdot\{)\}\subseteq L$$

gilt.

c) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik H derart an, dass L(H) die Sprache aller mathematischen Terme über den Zeichen

$$\mathbf{x}\,,\ \mathbf{y}\,,\ \mathbf{z}\,,\ +\,,\ \cdot\,,\ (\ \text{und}\ )$$

ist, wobei jeder nichtleere Teilterm geklammert werden muss. Beispielsweise soll L(G) die Terme

$$\varepsilon\,,\ (\mathbf{x})\,,\ ((\mathbf{x})+(\mathbf{y}))\,,\ ((\mathbf{x})+((\mathbf{y})\cdot(\mathbf{z})))\,,\ (((\mathbf{x})+(\mathbf{y}))\cdot(\mathbf{z}))$$

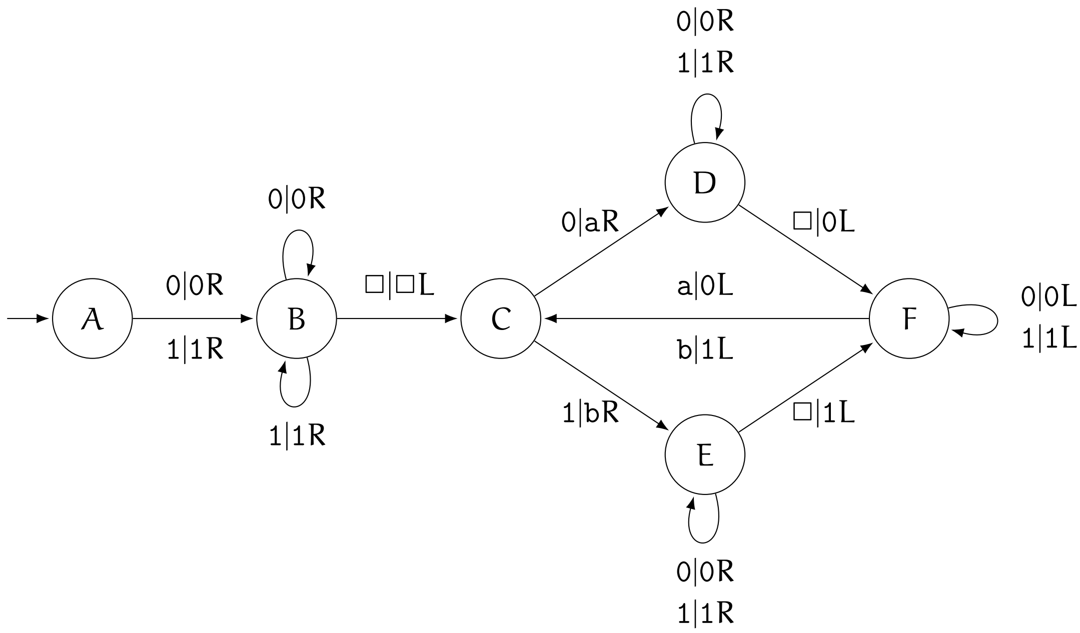
und so weiter enthalten.

Platz für Antworten zu Aufgabe 6:

Punkte

Aufgabe 7 (3 + 1 + 3 = 7 Punkte)

Gegeben sei die Turingmaschine T mit Zustandsmenge $Z = \{A, B, C, D, E, F\}$, Anfangszustand A und Bandalphabet $X = \{0, 1, a, b, \square\}$, deren Arbeitsweise durch das folgende Diagramm festgelegt ist:



a) Geben Sie für das Eingabewort 0100 (umgeben von Blanksymbolen) folgende Konfigurationen an:
   - die Konfiguration, die vorliegt, nachdem die Turingmaschine zum ersten Mal von Zustand C nach Zustand D gewechselt hat;
   - die Konfiguration, die vorliegt, nachdem die Turingmaschine zum ersten Mal von Zustand C nach Zustand E gewechselt hat;
   - die Endkonfiguration, die vorliegt, nachdem die Turingmaschine gehalten hat.

   Nutzen Sie dazu die Raster auf der Folgeseite. Notieren Sie nur den Teil des Bandes, der *keine* Blanksymbole enthält

b) Erläutern Sie knapp für jedes Eingabewort $w \in \{0, 1\}^*$ die Gestalt des Wortes auf dem Band der Endkonfiguration.

c) Geben Sie eine scharfe obere asymptotische Schranke für die Laufzeit der Turingmaschine in Abhängigkeit der Länge $n \in \mathbb{N}_0$ des Eingabewortes an.

Platz für Antworten zu Aufgabe 7a): Schreiben Sie jeweils in die untere Zeile eines Kastens die Bandbeschriftung und in die obere über dem aktuell besuchten Feld den Zustand.

Anfangskonfiguration:

	A								
	0	1	0	0					

Nach dem ersten Wechsel von C nach D:

Nach dem ersten Wechsel von C nach E:

Endkonfiguration:

Platz für Antworten zu Aufgabe 7: