Musterlösung (Stand 25.3.2014) zur
Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
5. März 2014

Klausur-nummer			

Nachname:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	6	8	4	7	5	6	8
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:		Note:	

Punkte

Aufgabe 1 (1+1+1+1+1+1 = 6 Punkte)

a) Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, so dass gilt:

$\langle R \rangle = \{w \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \text{ und die Länge von } w \text{ ist gerade }\}$.

Hinweis: Benutzen Sie bitte höchstens die Symbole a, b, (,), |, * und ∅ in dem regulären Ausdruck, aber keine anderen.

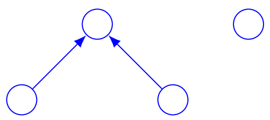
> *zum Beispiel* (aa|ab|ba|bb)* oder ((a|b)(a|b))* oder ((aa)*(ab)*(ba)*(bb)*)*

b) Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ an, für die gilt:

$f(n) \notin O(n^3) \wedge f(n) \notin \Omega(n^3)$.

> *zum Beispiel* $f(n) = \begin{cases} n^2 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n^4 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$
> Es muss eine unendliche Teilfolge geben, auf der $f(n)$ echt schwächer wächst als n^3 und es muss eine unendliche Teilfolge geben, auf der $f(n)$ echt stärker wächst als n^3.

c) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm einer Halbordnung auf einer vierelementigen Menge, die 2 maximale und 3 minimale Elemente besitzt.



d) Nennen Sie ein algorithmisches Problem, das man nicht mit Turingmaschinen lösen kann.

> *zum Beispiel:* „Halteproblem“ oder „Berechnung der Busy-Beaver-Funktion“

e) Sei A ein Alphabet und $L \subseteq A^*$ eine formale Sprache, die nicht regulär ist. Für welche endlichen Teilmengen $L' \subset L$ existiert eine Typ-3-Grammatik, die L' erzeugt?

> für alle

f) Es sei M eine Menge und $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit folgenden Eigenschaften:

- Jeder Knoten $A \in V$ ist eine Teilmenge $A \subseteq M$ von M.
- Eine Kante von Knoten A zu Knoten B existiert in G genau dann, wenn $A \subseteq B$ ist.
- Der Graph G ist streng zusammenhängend.

Wie viele Knoten hat G mindestens und wie viele Knoten hat G höchstens? *Hinweis:* Geben Sie möglichst gute Abschätzungen an! Die Antwort $|V|$ ist nicht erlaubt.

mindestens: 1 höchstens: 1

Das „höchstens 1“ kommt daher, dass wegen des strengen Zusammenhangs jede Teilmenge in jeder anderen enthalten ist. Also sind alle gleich, also gibt es nur eine.

Punkte

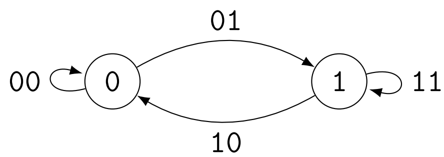
Aufgabe 2 (3+3+2 = 8 Punkte)

Es sei $G = (V, E)$ ein beliebiger endlicher gerichteter Graph. Der sogenannte *Kantengraph* $K(G) = (V', E')$ von G ist wie folgt definiert:

- $V' = E$
- $E' = \{ ((x,y),(y,z)) \mid (x,y) \in E \wedge (y,z) \in E \}$

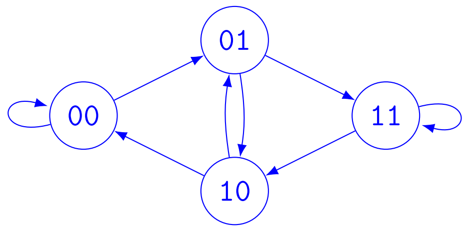
a) Gegeben sei der folgende Graph B_1, dessen Knoten und Kanten Namen tragen.

B_1 :



Zeichnen Sie den Graphen $B_2 = K(B_1)$ und geben Sie dabei den Knoten von B_2 geeignete Namen.

B_2 :



b) Beweisen Sie: Wenn in G jeder Knoten Ausgangsgrad 2 hat, dann hat in $K(G)$ auch jeder Knoten Ausgangsgrad 2.

Hinweis: Sie müssen keinen Induktionsbeweis führen.

Lösung

Es sei (x, y) eine Kante von G, also ein Knoten von $K(G)$. In $K(G)$ gibt es eine Kante von (x, y) zu jedem Knoten (y, z), also zu jeder Kante, die in G von Knoten y wegführt. Solche Kanten gibt es nach Voraussetzung genau 2.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}_+$ sei der Graph B_{n+1} definiert als $B_{n+1} = K(B_n)$. Füllen Sie die folgende Tabelle aus. Geben Sie dabei in der letzten Spalte geschlossene Formeln an.

Graph	B_1	B_2	B_3	B_n
Anzahl Knoten	2	4	8	2^n
Anzahl Kanten	4	8	16	2^{n+1}

Aus Teilaufgabe b) ergibt sich, dass die Kantenzahl immer doppelt so groß ist wie die Kantenzahl.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Punkte

Es sei A ein Alphabet. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: Für jede formale Sprache $L \subset A^*$, die genau n Wörter enthält, gibt es einen regulären Ausdruck R mit $\langle R \rangle = L$.

Lösung

Induktionsanfang: $n = 0$: Dann ist $L = \{\}$ und ein entsprechender regulärer Ausdruck ist $\emptyset$.

Induktionsvoraussetzung: für ein beliebiges aber festes n gelte: Für jede formale Sprache $L \subset A^*$, die genau n Wörter enthält, gibt es einen regulären Ausdruck R mit $\langle R \rangle = L$.

Induktionsschluss: $n \rightsquigarrow n+1$: zu zeigen: Für jede formale Sprache $L \subset A^*$, die genau $n+1$ Wörter enthält, gibt es einen regulären Ausdruck R mit $\langle R \rangle = L$.

Wenn L genau $n+1$ Wörter enthält, dann ist $L = L' \cup \{w\}$ für eine formale Sprache L', die n Wörter enthält, und $w \in A^* \setminus L'$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein regulärer Ausdruck R' mit $\langle R' \rangle = L'$.

Für das Wort w gibt es ebenfalls eine regulären Ausdruck R_w, nämlich

$$R_w = \begin{cases} w & \text{falls } w \neq \varepsilon \\ \emptyset * & \text{falls } w = \varepsilon \end{cases}$$

Dann ist $R = R' | R_w$ ein regulärer Ausdruck wie gesucht, denn $\langle R \rangle = \langle R' \rangle \cup \langle R_w \rangle = L' \cup \{w\} = L$.

Punkte

Aufgabe 4 (2+2+2+1 = 7 Punkte)

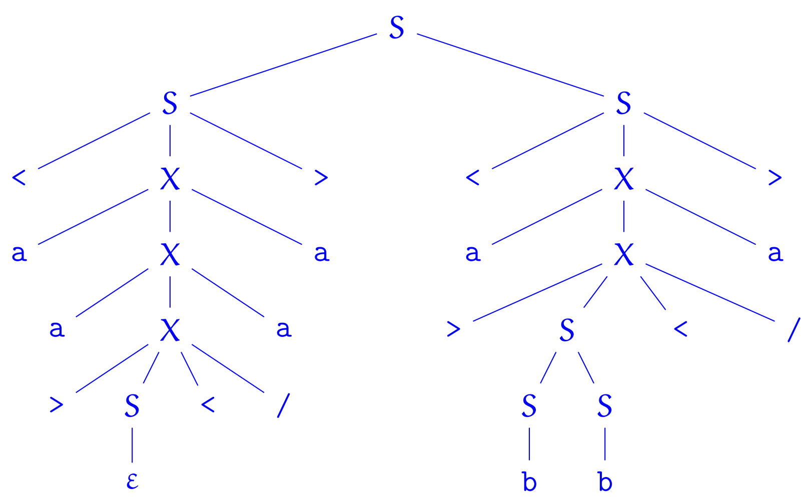
Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, X\}$, $T = \{\ \texttt{<}\ ,\ \texttt{>}\ ,\ \texttt{/}\ ,\ \texttt{a}\ ,\ \texttt{b}\ \}$ und Produktionenmenge

$$P = \{\ S \to SS \mid \texttt{<X>} \mid \texttt{b} \mid \varepsilon\ ,\ \ X \to \texttt{aXa} \mid \texttt{>S</}\ \}$$

Die von G erzeugte formale Sprache werde mit L bezeichnet, also $L = L(G)$.

a) Zeichnen Sie den Ableitungsbaum für das Wort $\texttt{<aa></aa><a>bb}$.

Lösung



b) Erklären Sie, warum für alle $k \in \mathbb{N}_+$ die Teilmenge $L \cap T^{9k}$ von $L(G)$ mindestens 2^k Wörter enthält.

Hinweis: Sie müssen keinen Induktionsbeweis führen.

Lösung

$L \cap T^9$ enthält die beiden Wörter $w_1 = \texttt{<aa></aa>}$ und $w_2 = \texttt{<a>bb}$. Folglich enthält $(L \cap T^9)^k$ alle Produkte aus k Faktoren, von denen jeder w_1 oder w_2 ist. Wegen der Produktion $S \to SS$ existieren die Ableitungen $S \Rightarrow^* S^k$, also ist $(L \cap T^9)^k \subseteq L \cap T^{9k}$. Jede der 2^k Kombinationen von Faktoren ergibt ein anderes Wort der Länge $9k$. Also enthält $L \cap T^{9k}$ mindestens 2^k Wörter.

c) Beweisen Sie, dass $L \cdot L = L$ ist.

Lösung

$L \subseteq L \cdot L$: Wegen der Produktion $S \to \varepsilon$ ist $\varepsilon \in L$.
Folglich ist $L = \{\varepsilon\} \cdot L \subseteq L \cdot L$

$L \cdot L \subseteq L$: Für alle $w_1, w_2 \in L$ gilt $S \Rightarrow^* w_1$ und $S \Rightarrow^* w_2$. Wegen der Produktion $S \to SS$ gilt dann aber auch $S \Rightarrow SS \Rightarrow^* w_1 w_2$, also ist dann auch immer $w_1 w_2 \in L$.

d) Geben Sie eine beliebige unendliche formale Sprache L' an, für die $L' \cdot L' \neq L'$ ist.

Lösung

Zum Beispiel hat jede formale Sprache mit $\varepsilon \notin L'$ diese Eigenschaft, etwa $\langle \texttt{aa*} \rangle$.

Es gibt aber auch formale Sprachen mit $\varepsilon \in L'$, die die Eigenschaft haben, zum Beispiel $\langle \texttt{a*b*} \rangle$

Punkte

Aufgabe 5 (2+1+1+1 = 5 Punkte)

Für eine Relation $R \subseteq M \times M$ auf einer Menge M definieren wir die Relation R^{-1} wie folgt:

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}\,.$$

a) Es sei $S \subseteq M \times M$ eine weitere Relation auf M.
Geben Sie an, wie $S \circ R$ definiert ist.

$S \circ R = \{(x, z) \mid \exists y \in M\colon (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$

b) Geben Sie die Relation $R^{-1} \circ R$ in der Form $R^{-1} \circ R = \{\ldots \mid \ldots\ldots\}$ an, ohne in der Mengenklammer die Zeichenfolge „R^{-1}" hinzuschreiben.

$R^{-1} \circ R = \{(x, z) \mid \exists y \in M\colon (x, y) \in R \wedge (z, y) \in R\}$

c) Es sei $\mathrm{Id}_M = \{(x, x) \mid x \in M\}$.
Welche Eigenschaft hat die Relation R, wenn $R^{-1} \circ R \subseteq \mathrm{Id}_M$ ist?

R ist linkseindeutig.

d) Beweisen Sie Ihre Behauptung aus Teilaufgabe c).

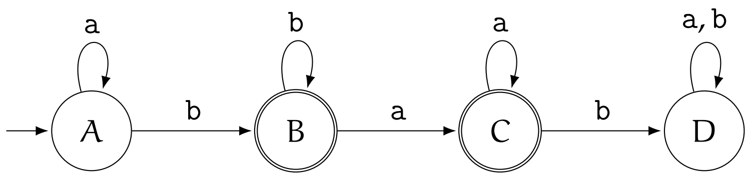
Lösung

$R^{-1} \circ R \subseteq \mathrm{Id}_M$ bedeutet $\big(\exists y \in M\colon (x, y) \in R \wedge (z, y) \in R\big) \implies x = z$
das bedeutet, wenn $x \neq z$, dann $(x, y_1) \in R$ und $(z, y_2) \in R$
nur für $y_1 \neq y_2$, und das ist die Definition von Linkseindeutigkeit.

Aufgabe 6 (2+3+1 = 6 Punkte)

Punkte

Es sei der folgende endliche Akzeptor M mit Zustandsmenge $Z = \{A, B, C, D\}$ und Eingabealphabet $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ gegeben:



a) Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, so dass gilt: $\langle R \rangle = L(M)$.

   Hinweis: Benutzen Sie bitte höchstens die Symbole `a`, `b`, `(`, `)`, `|`, `*` und `∅` in dem regulären Ausdruck, aber keine anderen.

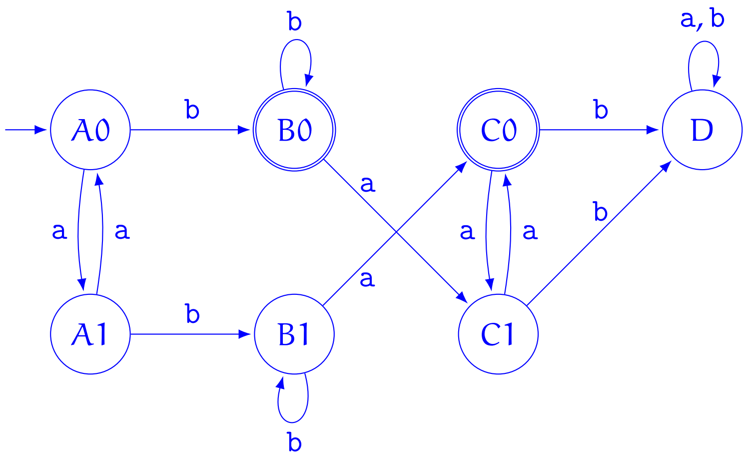
   Lösung: `a*bb*a*`

b) Geben sie einen endlichen Akzeptor an, der folgende formale Sprache akzeptiert:

   $$\{w \mid w \in L(M) \text{ und die Anzahl } N_{\mathtt{a}}(w) \text{ der } \mathtt{a} \text{ in } w \text{ ist gerade }\}$$

   Hinweis: Es muss sich um einen vollständigen deterministischen endlichen Akzeptor handeln wie er in der Vorlesung definiert wurde.

   Lösung



c) Wie viele verschiedene formale Sprachen kann man mit endlichen Akzeptoren erkennen, deren Eingabealphabet, Zustandsmenge, Anfangszustand und Zustandsüberführungsfunktion wie bei dem oben angegebenen Akzeptor M sind?

   Lösung: 16

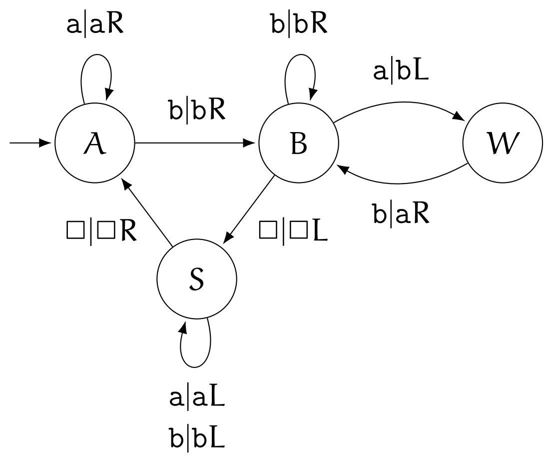
   Diese Zahl ergibt sich, weil jede Wahl einer Teilmenge von Z als Menge F zu einer anderen akzeptierten formalen Sprache führt.

Punkte

Aufgabe 7 (4+1+3 = 8 Punkte)

Gegeben sei die Turingmaschine T mit Zustandsmenge $Z = \{A, B, W, S\}$, Anfangszustand A und Bandalphabet $X = \{\square, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Die Arbeitsweise ist wie folgt festgelegt:

	A	B	W	S
a	$(A, \mathtt{a}, R)$	$(W, \mathtt{b}, L)$		$(S, \mathtt{a}, L)$
b	$(B, \mathtt{b}, R)$	$(B, \mathtt{b}, R)$	$(B, \mathtt{a}, R)$	$(S, \mathtt{b}, L)$
$\square$		$(S, \square, L)$		$(A, \square, R)$



Die Turingmaschine wird im folgenden benutzt für Bandbeschriftungen, bei denen zu Beginn der Berechnung auf dem Band ein Wort $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^+$ steht, das von Blanksymbolen $\square$ umgeben ist. Der Kopf der Turingmaschine stehe anfangs auf dem ersten Symbol des Eingabewortes.

a) Geben Sie für die Eingabe babaa folgende Konfigurationen an:

- ausgehend von der Anfangskonfiguration jede Konfiguration bis die Turingmaschine zum ersten Mal in Zustand S ist;
- die Konfiguration, die vorliegt, nachdem die Turingmaschine zum ersten Mal von Zustand S nach Zustand A gewechselt hat.
- die Konfiguration, die vorliegt, nachdem die Turingmaschine zum zweiten Mal von Zustand S nach Zustand A gewechselt hat.

Benutzen Sie bitte möglichst die Tabelle auf der nächsten Seite.

b) Für jede Eingabe $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^+$ gilt: Wenn die Turingmaschine hinreichend viele Schritte gemacht hat, dann ändert sich die Bandbeschriftung nicht mehr. Welches Wort steht dann auf dem Band?

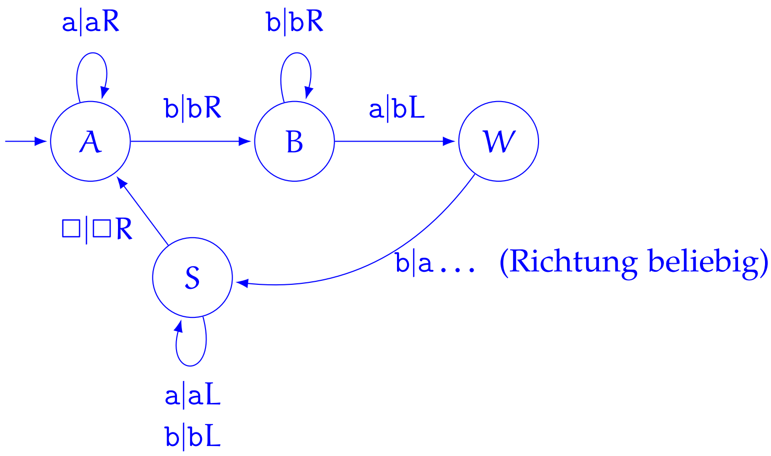
Lösung: $\mathtt{a}^{N_{\mathtt{a}}(w)}\mathtt{b}^{N_{\mathtt{b}}(w)}$

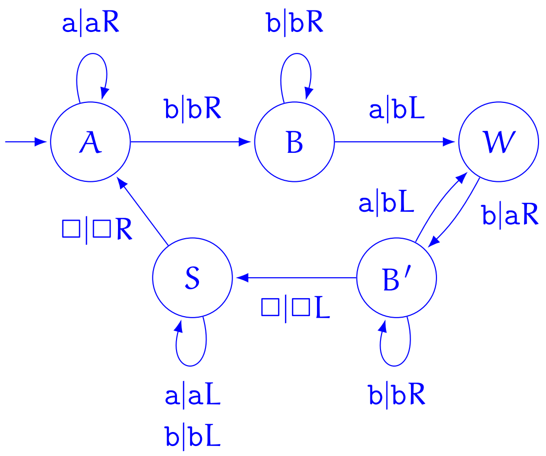
c) Ändern Sie die Turingmaschine so ab, dass die Turingmaschine irgendwann anhält, nachdem sich die Bandbeschriftung nicht mehr ändert. Zeichen Sie bitte das Zustandsdiagramm; geben Sie *keine Tabelle* an.

Hinweis: Ein zusätzlicher Zustand genügt. Wenn Sie mehr als drei zusätzliche Zustände benötigen, bekommen Sie nicht die volle Punktzahl auf diese Teilaufgabe.

Lösung

Es gibt viele Möglichkeiten. Hier beispielhaft eine TM mit 4 Zuständen und eine mit 5 Zuständen:





Platz für Antworten zu Aufgabe 7a): Schreiben Sie jeweils in die untere Zeile eines Kastens die Bandbeschriftung und in die obere über dem aktuell besuchten Feld den Zustand. Füllen Sie erst die linke Spalte, danach die rechte. Die Anfangskonfiguration ist angegeben. Es ist mehr Platz als nötig.

	A					
	b	a	b	a	a	

		B				
	b	a	b	a	a	

	W					
	b	b	b	a	a	

		B				
	a	b	b	a	a	

			B			
	a	b	b	a	a	

				B		
	a	b	b	a	a	

			W			
	a	b	b	b	a	

				B		
	a	b	a	b	a	

					B	
	a	b	a	b	a	

				W		
	a	b	a	b	b	

					B	
	a	b	a	a	b	

						B
	a	b	a	a	b	

					S	
	a	b	a	a	b	

nach erstem Wechsel $S \rightarrow A$:

	A					
	a	b	a	a	b	

nach zweitem Wechsel $S \rightarrow A$:

	A					
	a	a	a	b	b	