Probeklausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
7. Februar 2014

Hinweis: Diese Probeklausur wurde von Tutoren erstellt. Die An-/Abwesenheit bestimmter Aufgabentypen oder auch deren Schwierigkeit in der Probeklausur sagt nichts über die richtige Klausur aus. Diese Probeklausur wurde vor allem weder vom Übungsleiter noch vom Professor konzipiert. Sie dient nur Übungszwecken.

Name:	
Vorname:	
Matr.-Nr.:	
Tut.-Nr.:	

Aufgabe	1	2	3	4	5
max. Punkte	6	9	7	11	6
tats. Punkte					

Gesamtpunktzahl: / 39	Note:

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Kreuzen Sie für die folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch sind. Hinweis: Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Wenn Sie kein Kreuz setzen, bekommen Sie weder Plus- noch Minuspunkt, für das Ankreuzen beider Möglichkeiten wird ein Punkt abgezogen. Die gesamte Aufgabe wird mit mindestens 0 Punkten bewertet.

(a) Es gilt $\log(n) \in \mathcal{O}\left(\sqrt{n}\right)$.

☒ **wahr** ☐ falsch

(b) Sei

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid N_a(w) = N_b(w)\}$$

und

$$G = (\{S\}, \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}, S, \{S \to \mathbf{a}S\mathbf{b} \mid \mathbf{b}S\mathbf{a} \mid \varepsilon\})$$

gegeben. Dann gilt $L(G) = L$.

☐ wahr ☒ **falsch**

(c) Das leere Wort ϵ ist definiert als die Abbildung

$$\epsilon : \{\} \to \{\} \ .$$

☒ **wahr** ☐ falsch

(d) Seien L_1 und L_2 formale Sprachen. Dann gilt

$$L_1^* = L_2^* \Rightarrow L_1 = L_2 \ .$$

☐ wahr ☒ **falsch**

(e) $\exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : x = y$

☐ wahr ☒ **falsch**

(f) Der Graph mit der Adjazenzmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist schlingenfrei.

☒ **wahr** ☐ falsch

Aufgabe 2 (6+3 Punkte)

(a) Geben Sie einen endlichen Automaten an, welcher binär codierte Zahlen kleiner als $13_{10} = 1101_2$ akzeptiert. Beachten Sie hierbei auch, dass eine binär codierte Zahl führende Nullen besitzen kann. Geben Sie also einen Automaten an, welcher folgende Sprache akzeptiert:

$$L = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ und } \mathrm{Num}_2(w) < 13\}$$

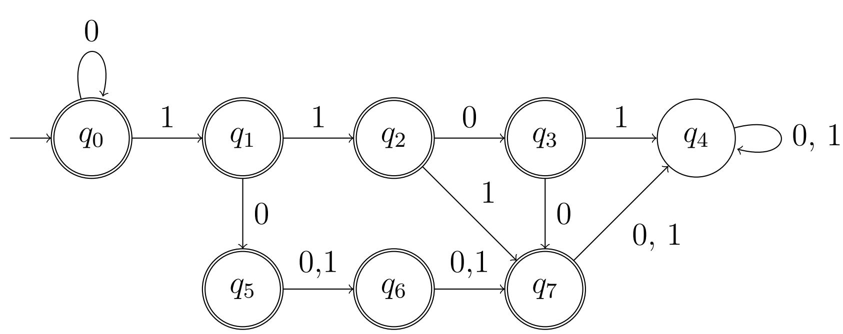
(b) Gegeben Sei eine Grammatik $G = (\{X, Y, Z\}, \{\mathbf{i}, \mathbf{m}, \mathbf{p}, \mathbf{s}\}, X, P)$ mit

$$P = \{X \to ZX \mid \mathbf{i}X\mathbf{i} \mid \mathbf{i}Y\mathbf{i},\ Y \to YXY \mid ZZ,\ Z \to \mathbf{m} \mid \mathbf{p} \mid \mathbf{s} \mid \varepsilon\}$$

Geben Sie einen Ableitungsbaum für das Wort **mississippi** aus der Grammatik G an.

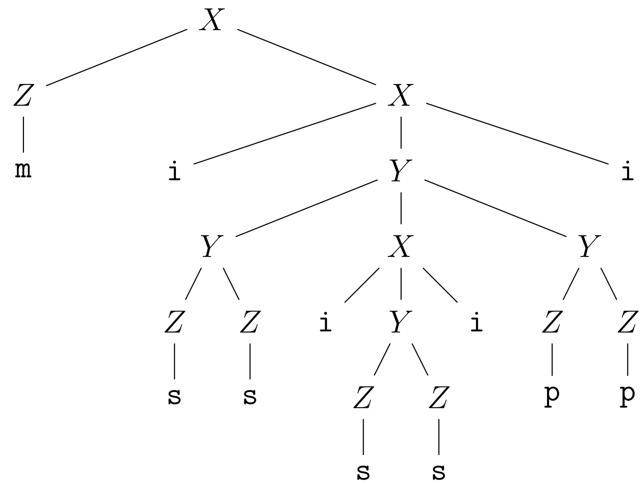
Lösung

(a) Das ist die einzige Lösung, welche mir eingefallen ist:



Bitte Punkte abziehen für fehlenden Startzustand (1 Punkt), fehlende 0-Schleife bei q_0 (2 Punkte), fehlender Müllzustand (1.5 Punkte). Man kann leicht die Zustandsübergänge zu den Zuständen q_5 bis q_7 vertauschen (zum Beispiel statt von q_2 auf q_7 auf q_6). Hier nur 1 Punkt abziehen.

(b) Ableitungsbaum. Weiß ehrlich nicht ganz, was da alles für Fehler kommen könnten, aber für kleine Fehler würde ich 1 Punkt und für Grobe Schnitzer (wie eine Produktion die es gar nicht gibt) mindestens 2 Punkte abziehen.


X
Z X
m i Y i
Y X Y
Z Z i Y i Z Z
s s Z Z p p
s s

Aufgabe 3 (6+1 Punkte)

Gegeben sei der folgende Algorithmus:

Eingabe: $a_0, b_0 \in \mathbb{N}_+$
$i \leftarrow 0$
while $a_i \neq b_i$ **do**
  if $a_i > b_i$ **then**
    $a_{i+1} \leftarrow a_i - b_i$
    $b_{i+1} \leftarrow b_i$
  else
    $a_{i+1} \leftarrow a_i$
    $b_{i+1} \leftarrow b_i - a_i$
  end if
  $i \leftarrow i + 1$
end while

(a) Beweisen Sie die folgende Schleifeninvariante durch vollständiger Induktion:

$$\forall i \in \mathbb{N}_0 \colon \forall d \in \mathbb{N}_+ \colon\ d \mid a_0 \text{ und } d \mid b_0 \Rightarrow d \mid a_i \text{ und } d \mid b_i$$

Erinnerung: $d \mid a$ bedeutet d teilt a, das heißt, $\exists r \in \mathbb{N}_0 \colon\ r \cdot d = a$.

(b) Begründen Sie kurz: Warum terminiert der Algorithmus für jede Eingabe $a_0, b_0 \in \mathbb{N}$?

Lösung

(a) Sei $d \in \mathbb{N}_+$ beliebig aber fest.

Induktionsanfang Trivial.

Induktionsvoraussetzung Für ein festes aber beliebiges $i \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$d \mid a_0 \text{ und } d \mid b_0 \Rightarrow d \mid a_i \text{ und } d \mid b_i$$

Induktionsschluss Zeige dann, dass auch

$$d \mid a_0 \text{ und } d \mid b_0 \Rightarrow d \mid a_{i+1} \text{ und } d \mid b_{i+1}$$

gilt. Sei also jetzt $d \mid a_0$ und $d \mid b_0$. Dann ist laut Induktionsvoraussetzung auch $d \mid a_i$ und $d \mid b_i$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a_i > b_i$ (im anderen Fall vertausche die Rollen von a_i und b_i). Dann ist laut dem Algorithmus $b_i = b_{i+1}$ und damit weil $d \mid b_i$ auch $d \mid b_{i+1}$. Weiterhin liefert der Algorithmus

$$a_{i+1} = a_i - b_i$$

Da aber sowohl $d \mid b_i$ und $d \mid a_i$ nach Voraussetzung, gilt auch $d \mid a_{i+1}$. Somit folgt nach der Induktionsvoraussetzung $d \mid a_{i+1}$ und $d \mid b_{i+1}$.

(b) In jedem Schritt des Algorithmus passiert Folgendes:

Fall 1: $a \neq b$
Die kleinere Zahl wird von der größeren abgezogen. Damit sind a und b weiterhin natürliche Zahlen, und $\max(a, b)$ ist echt kleiner geworden (also um mindestens 1), da beide Zahlen echt größer als Null sein müssen. Den wäre eine davon Null, so wäre sie auch schon am Anfang Null gewesen. Es gibt jedoch $a_0, b_0 \in \mathbb{N}_+$.

Fall 2: $a = b$: Der Algorithmus terminiert.

Die Folge $a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots$ wird also bei jedem Durchlauf echt kleiner, ist jedoch stets größer oder gleich 0. Dies kann nur endlich oft geschehen.

Aufgabe 4 (1+7+3 Punkte)

(a) Definieren Sie, wann zwei gerichtete Graphen isomorph heißen.

(b) Für welche der folgenden Graphen G_1 bis G_5 gibt es einen Isomorphismus zu einem der anderen Graphen? Geben Sie jeweils einen zugehörigen Isomorphismus an.

(c) Gegeben sind die folgenden beiden Adjazenzmatrizen:

Sind die zugehörigen Graphen G_{A1} und G_{A2} isomorph? Begründen Sie ihre Antwort kurz.

Lösung

(a) (V_1, E_1) und (V_2, E_2) heißen isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $f : V_1 \to V_2$ gibt mit der Eigenschaft

$$\forall x, y \in V_1 \ : \ \ (x, y) \in E_1 \iff (f(x), f(y)) \in E_2$$

(b) Es gibt nur zwischen G_1 und G_4 einen Isomorphismus. Aus der Sicht von G_1 nach G_4:

$$0 \mapsto v, 1 \mapsto w, 2 \mapsto x, 3 \mapsto y, 4 \mapsto z$$

(x,y und z können vertauscht werden) und im anderen Fall umgekehrt.

5 Punkte für die korrekte Angabe ob es einen Isomorphismus gibt oder nicht, 2 Punkte für die korrekten Isomorphismen.

(c) Nein, G_{A1} hat 4 Schlingen, G_{A2} nur 3, oder: unterschiedliche Kantenanzahl, oder Ausgangs/Eingangsgrad oder...

1 Punkt für die korrekte Antwort, 2 Punkte für die Begründung.

Aufgabe 5 (4+2 Punkte)

Gegeben sei eine Turingmaschine T mit

- Zustandsmenge $Z = \{s, a_1, \ldots, a_{12}, f\}$
- Anfangszustand s
- Bandalphabet $X = \{\Box, 0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}$

Die Arbeitsweise von T sei durch folgendes Diagramm festgelegt:

(a) Geben Sie für die Eingabe 1101 jeweils die Anfangskonfiguration, die Endkonfiguration und jede weitere Konfiguration an, welche sich nach einer Änderung der Bandbeschriftung ergibt.

(b) Für ein beliebiges Wort $w \in \{0,1\}^*$ bezeichne $T(w)$ die Ausgabe der Turingmaschine T bei Eingabe von w und $R(w)$ das von rechts nach links gelesene Wort w (wie in der Vorlesung definiert). Welche Beziehung gibt es zwischen $T(w)$ und $T(R(w))$?

Lösung

(a) Falls jemand bei dem Durchlauf des Zustandes f einige Konfigurationen weggelassen hat, ist das auch in Ordnung. 1 Punkt jeweils für Start- und Endkonfiguration, einen halben abziehen pro Fehler beim Rest.

$$\begin{gathered} s1101 \\ 11a_3 0\bar{0} \\ \bar{0}s10\bar{0} \\ \bar{0}a_5 1\bar{1}\bar{0} \\ \bar{0}\bar{1}s\bar{1}\bar{0} \\ 0f\bar{1}\bar{1}\bar{0} \\ 01f\bar{1}\bar{0} \\ 011f\bar{0} \\ 0110f \end{gathered}$$

(b) Sie sind gleich! $T(w) = T(R(w))$.