Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 3

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.
	Name des Tutors:

Ausgabe: 5. November 2014

Abgabe: 14. November 2014, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 3:	/ 20 + 5
Blätter 1 – 3:	/ 52 + 10

Aufgabe 3.1 (1 + 2 + 1 = 4 Punkte)
Gegeben seien die zwei Wörter $u = \texttt{10010}$ und $v = \texttt{01011}$ aus Z_2^*.

a) Geben Sie die Dezimaldarstellung der Zahlen an, die u und v als Binärdarstellung haben. Geben Sie die Binärdarstellung $w \in Z_2^*$ der Summe dieser Zahlen an.
b) Geben Sie die Dezimaldarstellung der Zahlen an, die u, v und w als Zweierkomplementdarstellung haben.
c) Ist w die Zweierkomplementdarstellung der Summe der Zahlen mit den Zweierkomplementdarstellungen u und v?

Aufgabe 3.2 (5 Punkte)
Wir betrachten Wörter über der Ziffernmenge $Z_2 = \{\texttt{0}, \texttt{1}\}$ und interpretieren diese wie folgt als ganze Zahlen:

$$\begin{aligned} f\colon Z_2^* &\to \mathbb{Z}, \\ w &\mapsto \sum_{i=0}^{|w|-1} \operatorname{num}_2(w_{|w|-1-i})(-2)^i. \end{aligned}$$

Erinnerung: w_j bezeichnet das j-te Zeichen von w (von links nach rechts ab 0).

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die Abbildung f surjektiv ist, das heißt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(\exists v \in Z_2^*\colon f(v) = -n) \land (\exists w \in Z_2^*\colon f(w) = n). \tag{1}$$

Hinweis: Für den Induktionsanfang zeigen Sie die Aussage (1) für $n \in \{0, 1\}$. Für den Induktionsschritt wählen Sie ein beliebiges aber festes $\widetilde{n} \in \mathbb{N}_0$ derart, dass für jedes $n \leq \widetilde{n}$ die Aussage (1) gilt, insbesondere für $\pm\lfloor \widetilde{n}/2 \rfloor$. Dabei ist mit $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x gemeint („Abrunden“).

Aufgabe 3.3 (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 3 = 11 Punkte)
Es sei Z_3 die dreielementige Menge $\{\texttt{0}, \texttt{1}, \texttt{2}\}$, es sei D die zweielementige Menge $\{\texttt{L}, \texttt{R}\}$ und es seien f und s die Abbildungen

$$\left\{ \begin{aligned} f\colon Z_3 \times D &\to Z_3, \\ (x, d) &\mapsto x, \end{aligned} \right\} \quad \text{bzw.} \quad \left\{ \begin{aligned} s\colon Z_3 \times D &\to D, \\ (x, d) &\mapsto d. \end{aligned} \right\}$$

a) Geben Sie $f((\texttt{2}, \texttt{L}))$ und $s((\texttt{1}, \texttt{R}))$ an.
b) Zeigen Sie, dass die Abbildungen f und s surjektiv aber nicht injektiv sind.

Für jedes Wort $w \in Z_3^*$ bezeichne $c(w)$ das Wort

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{|w|} &\to Z_3 \times D, \\ i &\mapsto \begin{cases} (w_i, \texttt{R}), & \text{falls } i \text{ gerade ist,} \\ (w_i, \texttt{L}), & \text{falls } i \text{ ungerade ist.} \end{cases} \end{aligned}$$

Für jedes Wort $w \in (Z_3 \times D)^*$ bezeichne $d(w)$ das Wort

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{|w|} &\to Z_3, \\ i &\mapsto f(w_i). \end{aligned}$$

Damit ist c eine Abbildung von Z_3^* nach $(Z_3 \times D)^*$ und d ist eine Abbildung von $(Z_3 \times D)^*$ nach Z_3^*.

c) Geben Sie $c(\epsilon)$, $c(\mathtt{02101})$ und $d((\mathtt{0},\mathtt{R})(\mathtt{2},\mathtt{L})(\mathtt{1},\mathtt{R})(\mathtt{0},\mathtt{L}),(\mathtt{1},\mathtt{R}))$ an.

d) Zeigen Sie, dass die Abbildung c injektiv aber nicht surjektiv ist und, dass die Abbildung d surjektiv aber nicht injektiv ist.

e) Zeigen Sie, dass für jedes Wort $w \in Z_3^*$ gilt $d(c(w)) = w$ und, dass es ein Wort $w \in (Z_3 \times D)^*$ gibt so, dass $c(d(w)) \neq w$ gilt.

f) Zeigen Sie, dass die Abbildung d ein ϵ-freier Homomorphismus ist. Freiwillige Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, dass die Abbildung c leider kein ϵ-freier Homomorphismus ist.

Weiter seien p, t und r die Abbildungen

$$\left\{\begin{aligned} p\colon D &\to D, \\ \mathtt{L} &\mapsto \mathtt{R}, \\ \mathtt{R} &\mapsto \mathtt{L}, \end{aligned}\right\} \quad \text{bzw.} \quad \left\{\begin{aligned} t\colon Z_3 &\to \mathbb{Z}_3, \\ \mathtt{0} &\mapsto 0, \\ \mathtt{1} &\mapsto 1, \\ \mathtt{2} &\mapsto 2, \end{aligned}\right\} \quad \text{bzw.} \quad \left\{\begin{aligned} r\colon \mathbb{Z}_3 &\to Z_3, \\ 0 &\mapsto \mathtt{0}, \\ 1 &\mapsto \mathtt{1}, \\ 2 &\mapsto \mathtt{2}. \end{aligned}\right\}$$

Für jedes Wort $w \in (Z_3 \times D)^*$ bezeichne $\Phi(w)$ das Wort

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{|w|} &\to Z_3 \times D \\ i &\mapsto \begin{cases} (r(\min(t(f(w_i)), t(f(w_{i+1})))), p(s(w_i))), & \text{falls } s(w_i) = \mathtt{R} \land i \leq |w| - 2, \\ (r(\max(t(f(w_{i-1})), t(f(w_i)))), p(s(w_i))), & \text{falls } s(w_i) = \mathtt{L} \land i \geq 1, \\ (f(w_i), p(s(w_i))), & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Somit ist Φ eine Abbildung von $(Z_3 \times D)^*$ nach $(Z_3 \times D)^*$. Ferner sei L_s die formale Sprache

$$\{\mathtt{0}\}^* \cdot \{\mathtt{1}\}^* \cdot \{\mathtt{2}\}^*.$$

g) Geben Sie, $\Phi(\epsilon)$, $\Phi((\mathtt{1},\mathtt{R}))$, $\Phi((\mathtt{1},\mathtt{R})(\mathtt{0},\mathtt{L}))$, $\Phi((\mathtt{1},\mathtt{L})(\mathtt{0},\mathtt{R}))$, $\Phi((\mathtt{0},\mathtt{R})(\mathtt{1},\mathtt{L}))$, $\Phi((\mathtt{0},\mathtt{L})(\mathtt{1},\mathtt{R}))$, sowie $\Phi((\mathtt{2},\mathtt{R})(\mathtt{1},\mathtt{L})(\mathtt{0},\mathtt{R}))$, $\Phi(\Phi((\mathtt{2},\mathtt{R})(\mathtt{1},\mathtt{L})(\mathtt{0},\mathtt{R})))$ und $\Phi(\Phi(\Phi((\mathtt{2},\mathtt{R})(\mathtt{1},\mathtt{L})(\mathtt{0},\mathtt{R}))))$ an.

h) Zeigen Sie, dass für jedes Wort $w \in L_s$ und jede nicht-negative ganze Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ gilt
$$d(\Phi^k(c(w))) = w.$$
Zeigen Sie außerdem, dass für jedes Wort $w \in Z_3^* \setminus L_s$ gilt
$$d(\Phi(c(w))) \neq w \lor d(\Phi^2(c(w))) \neq w.$$

In der Extra-Aufgabe 3.4 auf der nächsten Seite werden wir sehen, dass wiederholtes Anwenden von Φ auf die Codierung eines Wortes und anschließende Decodierung dieses Wort sortiert. Dieser Sortieralgorithmus heißt *Odd–Even Transposition Sort* und ist in hohem Grade parallelisierbar.

***Aufgabe 3.4 (2 + 2 + 1 = 5 Extrapunkte)**

Fortsetzung von Aufgabe 3.3.

i) Zeigen Sie, dass für jedes Wort $w \in Z_3^*$ und jede nicht-negative ganze Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\mathrm{Num}_3(d(\Phi^k(c(w)))) \leq \mathrm{Num}_3(d(c(w))).$$

Zeigen Sie außerdem, dass für jedes Wort $w \in Z_3^* \setminus L_s$ gilt

$$\mathrm{Num}_3(d(\Phi^2(c(w)))) \leq \mathrm{Num}_3(d(c(w))) - 1.$$

j) Folgern Sie aus den Teilaufgaben 3.3 h) und 3.4 i), dass es für jedes Wort $w \in Z_3^*$ genau eine nicht-negative ganze Zahl $k_w \in \mathbb{N}_0$ gibt derart, dass

$$\begin{aligned} \forall j \in \mathbb{N}_0\colon (j < k_w \implies d(\Phi^j(c(w))) \notin L_s) \\ \wedge (j \geq k_w \implies d(\Phi^j(c(w))) \in L_s). \end{aligned}$$

k) Zeigen Sie, dass für jedes Wort $w \in Z_3^*$ gilt

$$d(\Phi^{k_w}(c(w))) = 0^{\mathrm{N}_0(w)} \cdot 1^{\mathrm{N}_1(w)} \cdot 2^{\mathrm{N}_2(w)}.$$

Möglicherweise ist es hilfreich zuvor zu zeigen, dass für jedes Wort $w \in Z_3^*$ gilt

$$\forall i \in Z_3 \forall k \in \mathbb{N}_0\colon \mathrm{N}_i(w) = \mathrm{N}_i(d(\Phi^k(c(w)))).$$

Für jede positive ganze Zahl $n \in \mathbb{N}_+$ kann unsere Variante von Odd-Even Transposition Sort auf natürliche Weise auf Z_n anstelle von Z_3 verallgemeinert werden.