Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 3

Matr.nr.:							

Nachname:

Vorname:

Tutorium: Nr. Name des Tutors:

Ausgabe: 5. November 2014

Abgabe: 14. November 2014, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 3:	/ 20 + 5
Blätter 1 – 3:	/ 52 + 10

Aufgabe 3.1 (1 + 2 + 1 = 4 Punkte)
Gegeben seien die zwei Wörter $u = \texttt{10010}$ und $v = \texttt{01011}$ aus Z_2^*.

a) Geben Sie die Dezimaldarstellung der Zahlen an, die u und v als Binärdarstellung haben. Geben Sie die Binärdarstellung $w \in Z_2^*$ der Summe dieser Zahlen an.
b) Geben Sie die Dezimaldarstellung der Zahlen an, die u, v und w als Zweierkomplementdarstellung haben.
c) Ist w die Zweierkomplementdarstellung der Summe der Zahlen mit den Zweierkomplementdarstellungen u und v?

Lösung 3.1

a) $\mathrm{Num}_2(u) = 18$, $\mathrm{Num}_2(v) = 11$, $\mathrm{Num}_2(w) = \mathrm{Num}_2(u) + \mathrm{Num}_2(v) = 29$, $w = \texttt{11101}$.
b) $\mathrm{Num}_{\mathrm{Zkpl}}(u) = -2^{|u|-1}u_0 + \mathrm{Num}_2(u_1 u_2 \ldots u_{|u|-1}) = -14$, $\mathrm{Num}_{\mathrm{Zkpl}}(v) = \mathrm{Num}_2(v) = 11$, $\mathrm{Num}_{\mathrm{Zkpl}}(w) = -3$
c) Ja. ($\mathrm{Num}_{\mathrm{Zkpl}}(u) + \mathrm{Num}_{\mathrm{Zkpl}}(v) = -3 = \mathrm{Num}_{\mathrm{Zkpl}}(w)$)

Aufgabe 3.2 (5 Punkte)
Wir betrachten Wörter über der Ziffernmenge $Z_2 = \{\texttt{0}, \texttt{1}\}$ und interpretieren diese wie folgt als ganze Zahlen:

$$\begin{aligned} f\colon Z_2^* &\to \mathbb{Z}, \\ w &\mapsto \sum_{i=0}^{|w|-1} \mathrm{num}_2(w_{|w|-1-i})(-2)^i. \end{aligned}$$

Erinnerung: w_j bezeichnet das j-te Zeichen von w (von links nach rechts ab 0).

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die Abbildung f surjektiv ist, das heißt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(\exists v \in Z_2^*\colon f(v) = -n) \land (\exists w \in Z_2^*\colon f(w) = n). \tag{1}$$

Hinweis: Für den Induktionsanfang zeigen Sie die Aussage (1) für $n \in \{0, 1\}$. Für den Induktionsschritt wählen Sie ein beliebiges aber festes $\widetilde{n} \in \mathbb{N}_0$ derart, dass für jedes $n \leq \widetilde{n}$ die Aussage (1) gilt, insbesondere für $\pm\lfloor \widetilde{n}/2 \rfloor$. Dabei ist mit $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x gemeint („Abrunden“).

Lösung 3.2
Induktionsanfang: Es gilt

$$\begin{aligned} f(\texttt{0}) &= \sum_{i=0}^{0} \mathrm{num}_2(\texttt{0}_{1-1-i})(-2)^i \\ &= \mathrm{num}_2(\texttt{0}_0)(-2)^0 = \mathrm{num}_2(\texttt{0}) \cdot 1 \\ &= 0 \cdot 1 = 0 = -0. \end{aligned}$$

Analog gilt $f(\mathtt{1}) = 1 \cdot 1 = 1$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
f(\mathtt{11}) &= \sum_{i=0}^{1} \mathrm{num}_2(\mathtt{11}_{1-i})(-2)^i \\
&= \mathrm{num}_2(\mathtt{11}_0)(-2)^1 + \mathrm{num}_2(\mathtt{11}_1)(-2)^0 \\
&= \mathrm{num}_2(1)(-2) + \mathrm{num}_2(1) \\
&= -2 + 1 \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt Aussage (1) für $n \in \{0, 1\}$.

Induktionsvoraussetzung: Es sei $\widetilde{n} \in \mathbb{N}_+$ beliebig aber fest und derart, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \leq \widetilde{n}$ die Aussage (1) gilt.

Induktionsschluss: Wir müssen zwei Wörter $\widetilde{v}$ und $\widetilde{w}$ über Z_2 finden so, dass $f(\widetilde{v}) = -(\widetilde{n}+1)$ und $f(\widetilde{w}) = \widetilde{n}+1$. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1: $\widetilde{n}+1$ ist gerade. Setze $n = (\widetilde{n}+1)/2$. Es gelten $n \in \mathbb{N}_0$ und $n \leq \widetilde{n}$. Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es zwei Wörter v und w über Z_2 so, dass $f(v) = -n$ und $f(w) = n$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\widetilde{n}+1 &= (-2)(-n) \\
&= (-2) f(v) \\
&= (-2) \sum_{i=0}^{|v|-1} \mathrm{num}_2(v_{|v|-1-i})(-2)^i \\
&= \sum_{i=0}^{|v|-1} \mathrm{num}_2(v_{|v|-(i+1)})(-2)^{i+1} \\
&= \sum_{j=1}^{|v|} \mathrm{num}_2(v_{|v|-j})(-2)^j + 0 \\
&= \sum_{j=0}^{|v\mathtt{0}|-1} \mathrm{num}_2(v\mathtt{0}_{|v\mathtt{0}|-1-j})(-2)^j \\
&= f(v \cdot \mathtt{0}).
\end{aligned}$$

Analog gilt

$$\begin{aligned}
-\widetilde{n}-1 &= (-2)n \\
&= (-2) f(w) \\
&= f(w \cdot \mathtt{0}).
\end{aligned}$$

Somit sind $\widetilde{v} = w\mathtt{0}$ und $\widetilde{w} = v\mathtt{0}$ die gesuchten Wörter.

Fall 2: $\widetilde{n}+1$ ist ungerade. Setze $n = \widetilde{n}/2$. Es gelten $n \in \mathbb{N}_0$ und $n \leq \widetilde{n}$. Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es ein Wort v über Z_2 so, dass $f(v) = -n$.

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\widetilde{n}+1 &= (-2)(-n)+1 \\
&= (-2)f(v)+1 \\
&= (-2)\sum_{i=0}^{|v|-1} \operatorname{num}_2(v_{|v|-1-i})(-2)^i + 1 \\
&= \sum_{i=0}^{|v|-1} \operatorname{num}_2(v_{|v|-(i+1)})(-2)^{i+1} + 1 \\
&= \sum_{j=1}^{|v|} \operatorname{num}_2(v_{|v|-j})(-2)^j + 1 \\
&= \sum_{j=0}^{|v\mathtt{1}|-1} \operatorname{num}_2(v_{|v\mathtt{1}|-1-j})(-2)^j \\
&= f(v\mathtt{1}).
\end{aligned}$$

Setze $n' = \widetilde{n}/2+1$. Es gelten $n' \in \mathbb{N}_0$ und $n' \leq \widetilde{n}$. Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es ein Wort w über Z_2 so, dass $f(w) = n'$. Damit gilt analog zu eben

$$\begin{aligned}
-\widetilde{n}-1 &= (-2)n'+1 \\
&= (-2)f(w)+1 \\
&= f(w \cdot \mathtt{1}).
\end{aligned}$$

Somit sind $\widetilde{v} = w\mathtt{1}$ und $\widetilde{w} = v\mathtt{1}$ die gesuchten Wörter.
Insgesamt gilt Aussage (1) für $n = \widetilde{n}+1$.

Beweisschluss: Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt Aussage (1) für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 3.3 (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 3 = 11 Punkte)
Es sei Z_3 die dreielementige Menge $\{\mathtt{0},\mathtt{1},\mathtt{2}\}$, es sei D die zweielementige Menge $\{\mathtt{L},\mathtt{R}\}$ und es seien f und s die Abbildungen

$$\left\{\begin{aligned} f\colon Z_3 \times D &\to Z_3, \\ (x,d) &\mapsto x, \end{aligned}\right\} \quad \text{bzw.} \quad \left\{\begin{aligned} s\colon Z_3 \times D &\to D, \\ (x,d) &\mapsto d. \end{aligned}\right\}$$

a) Geben Sie $f((\mathtt{2},\mathtt{L}))$ und $s((\mathtt{1},\mathtt{R}))$ an.
b) Zeigen Sie, dass die Abbildungen f und s surjektiv aber nicht injektiv sind.

Für jedes Wort $w \in Z_3^*$ bezeichne $c(w)$ das Wort

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}_{|w|} &\to Z_3 \times D, \\
i &\mapsto \begin{cases} (w_i,\mathtt{R}), & \text{falls } i \text{ gerade ist,} \\ (w_i,\mathtt{L}), & \text{falls } i \text{ ungerade ist.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Für jedes Wort $w \in (Z_3 \times D)^*$ bezeichne $d(w)$ das Wort

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{|w|} &\to Z_3, \\ i &\mapsto f(w_i). \end{aligned}$$

Damit ist c eine Abbildung von Z_3^* nach $(Z_3 \times D)^*$ und d ist eine Abbildung von $(Z_3 \times D)^*$ nach Z_3^*.

c) Geben Sie $c(\epsilon)$, $c(\mathtt{02101})$ und $d((\mathtt{0},\mathtt{R})(\mathtt{2},\mathtt{L})(\mathtt{1},\mathtt{R})(\mathtt{0},\mathtt{L}),(\mathtt{1},\mathtt{R}))$ an.

d) Zeigen Sie, dass die Abbildung c injektiv aber nicht surjektiv ist und, dass die Abbildung d surjektiv aber nicht injektiv ist.

e) Zeigen Sie, dass für jedes Wort $w \in Z_3^*$ gilt $d(c(w)) = w$ und, dass es ein Wort $w \in (Z_3 \times D)^*$ gibt so, dass $c(d(w)) \neq w$ gilt.

f) Zeigen Sie, dass die Abbildung d ein ϵ-freier Homomorphismus ist. Freiwillige Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, dass die Abbildung c leider kein ϵ-freier Homomorphismus ist.

Weiter seien p, t und r die Abbildungen

$$\left\{\begin{aligned} p\colon D &\to D, \\ \mathtt{L} &\mapsto \mathtt{R}, \\ \mathtt{R} &\mapsto \mathtt{L}, \end{aligned}\right\} \quad \text{bzw.} \quad \left\{\begin{aligned} t\colon Z_3 &\to \mathbb{Z}_3, \\ \mathtt{0} &\mapsto 0, \\ \mathtt{1} &\mapsto 1, \\ \mathtt{2} &\mapsto 2, \end{aligned}\right\} \quad \text{bzw.} \quad \left\{\begin{aligned} r\colon \mathbb{Z}_3 &\to Z_3, \\ 0 &\mapsto \mathtt{0}, \\ 1 &\mapsto \mathtt{1}, \\ 2 &\mapsto \mathtt{2}. \end{aligned}\right\}$$

Für jedes Wort $w \in (Z_3 \times D)^*$ bezeichne $\Phi(w)$ das Wort

$$\begin{aligned} &\mathbb{Z}_{|w|} \to Z_3 \times D \\ &i \mapsto \begin{cases} (r(\min(t(f(w_i)), t(f(w_{i+1})))), p(s(w_i))), & \text{falls } s(w_i) = \mathtt{R} \wedge i \leq |w| - 2, \\ (r(\max(t(f(w_{i-1})), t(f(w_i)))), p(s(w_i))), & \text{falls } s(w_i) = \mathtt{L} \wedge i \geq 1, \\ (f(w_i), p(s(w_i))), & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Somit ist Φ eine Abbildung von $(Z_3 \times D)^*$ nach $(Z_3 \times D)^*$. Ferner sei L_s die formale Sprache

$$\{\mathtt{0}\}^* \cdot \{\mathtt{1}\}^* \cdot \{\mathtt{2}\}^*.$$

g) Geben Sie, $\Phi(\epsilon)$, $\Phi((\mathtt{1},\mathtt{R}))$, $\Phi((\mathtt{1},\mathtt{R})(\mathtt{0},\mathtt{L}))$, $\Phi((\mathtt{1},\mathtt{L})(\mathtt{0},\mathtt{R}))$, $\Phi((\mathtt{0},\mathtt{R})(\mathtt{1},\mathtt{L}))$, $\Phi((\mathtt{0},\mathtt{L})(\mathtt{1},\mathtt{R}))$, sowie $\Phi((\mathtt{2},\mathtt{R})(\mathtt{1},\mathtt{L})(\mathtt{0},\mathtt{R}))$, $\Phi(\Phi((\mathtt{2},\mathtt{R})(\mathtt{1},\mathtt{L})(\mathtt{0},\mathtt{R})))$ und $\Phi(\Phi(\Phi((\mathtt{2},\mathtt{R})(\mathtt{1},\mathtt{L})(\mathtt{0},\mathtt{R}))))$ an.

h) Zeigen Sie, dass für jedes Wort $w \in L_s$ und jede nicht-negative ganze Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$d(\Phi^k(c(w))) = w.$$

Zeigen Sie außerdem, dass für jedes Wort $w \in Z_3^* \setminus L_s$ gilt

$$d(\Phi(c(w))) \neq w \vee d(\Phi^2(c(w))) \neq w.$$

In der Extra-Aufgabe 3.4 auf der nächsten Seite werden wir sehen, dass wiederholtes Anwenden von Φ auf die Codierung eines Wortes und anschließende Decodierung dieses Wort sortiert. Dieser Sortieralgorithmus heißt *Odd–Even Transposition Sort* und ist in hohem Grade parallelisierbar.

Lösung 3.3

a) $f((2,\mathtt{L})) = 2$ und $s((1,\mathtt{R})) = \mathtt{R}$.

b) Für jedes $x \in Z_3$ gilt $f((x,\mathtt{L})) = x$. Also ist f surjektiv.
Für jedes $y \in D$ gilt $s((0,y)) = y$. Also ist s surjektiv.
Es gilt $(0,\mathtt{L}) \neq (0,\mathtt{R})$ und $f((0,\mathtt{L})) = 0 = f((0,\mathtt{R}))$. Also ist f nicht injektiv.
Es gilt $(0,\mathtt{L}) \neq (1,\mathtt{L})$ und $s((0,\mathtt{L})) = \mathtt{L} = s((1,\mathtt{L}))$. Also ist s nicht injektiv.

c) $c(\epsilon) = \epsilon$, $c(02101) = (0,\mathtt{R})(2,\mathtt{L})(1,\mathtt{R})(0,\mathtt{L})(1,\mathtt{R})$ und
$d((0,\mathtt{R})(2,\mathtt{L})(1,\mathtt{R})(0,\mathtt{L}),(1,\mathtt{R})) = d(c(02101)) = 02101$.

d)
- *Injektivität von c:* Es seien $v \in Z_3^*$ und $w \in Z_3^*$ derart, dass $v \neq w$.

  Fall 1: $|v| \neq |w|$. Dann gilt $|c(v)| = |v| \neq |w| = |c(w)|$. Also gilt $c(v) \neq c(w)$.

  Fall 2: $|v| = |w|$. Dann gilt $|v| = |w| \geq 1$. Also gibt es ein $i \in \mathbb{Z}_{|v|}$ so, dass $v_i \neq w_i$. Wegen $f(c(v)_i) = v_i$ und $f(c(w)_i) = w_i$ folgt $f(c(v)_i) \neq f(c(w)_i)$. Da f als Abbildung rechtseindeutig ist, gilt $c(v)_i \neq c(w)_i$. Somit gilt $c(v) \neq c(w)$.

  Insgesamt gilt $c(v) \neq c(w)$. Folglich ist c injektiv.
- *Nicht-Surjektivität von c:* Für jedes $w \in Z_3^*$ gilt $s(c(w)_0) = \mathtt{R}$. Also ist kein Wort, das mit $(0,\mathtt{L})$ beginnt, im Bild von c. Also ist c nicht surjektiv.
- *Surjektivität von d:* Es sei $w \in Z_3^*$. Definiere $\widetilde{w}$ über $Z_3 \times D$ als

  $$\begin{aligned}\widetilde{w}\colon \mathbb{Z}_{|w|} &\to Z_3 \times D,\\ i &\mapsto (w_i,\mathtt{L}).\end{aligned}$$

  Für jedes $i \in |\widetilde{w}|$ gilt

  $$\begin{aligned}d(\widetilde{w})_i &= f(\widetilde{w}_i)\\ &= f((w_i,\mathtt{L}))\\ &= w_i.\end{aligned}$$

  Folglich ist $d(\widetilde{w}) = w$. Also ist d surjektiv.
- *Nicht-Injektivität von d:* Für die Wörter $(0,\mathtt{L})$ und $(0,\mathtt{R})$ über $Z_3 \times D$ sind verschieden, aber $d((0,\mathtt{L})) = f((0,\mathtt{L})) = 0$ und ebenso $d((0,\mathtt{R})) = 0$. Somit ist d nicht injektiv.

e) Es sei $w \in Z_3^*$. Weiter sei $i \in |w|$. Ferner sei

$$d = \begin{cases}\mathtt{R}, & \text{falls } i \text{ gerade ist,}\\ \mathtt{L}, & \text{falls } i \text{ ungerade ist.}\end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} d(c(w))_i &= f(c(w)_i) \\ &= f((w_i, d)) \\ &= w_i. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt $d(c(w)) = w$.
Nun sei $w = (\mathtt{0}, \mathtt{L}) \in (Z_3 \times D)^*$. Dann gilt $d(w) = \mathtt{0}$ und $c(d(w)) = c(\mathtt{0}) = (\mathtt{0}, \mathtt{R})$. Also $c(d(w)) \neq w$.

f) Die Abbildung c ist leider kein Homomorphismus, da $c(\mathtt{0}) = (\mathtt{0}, R)$ jedoch $c(\mathtt{00}) = (\mathtt{0}, R)(\mathtt{0}, L) \neq (\mathtt{0}, R)(\mathtt{0}, R) = c(\mathtt{0})c(\mathtt{0})$.
Für jedes $w \in (Z_3 \times D)^*$ gilt $|d(w)| = |w|$ nach Definition von d und demnach $d(w) = \epsilon \iff w = \epsilon$, da ϵ das einzige Wort der Länge 0 ist. Falls d ein Homomorphismus ist, ist dieser also ϵ-frei.
Die Abbildung d ist gerade jener Homomorphismus der von f erzeugt wird. Anstelle der obigen Definition hätten wir d induktiv definieren können durch

$$\begin{gathered} d(\epsilon) = \epsilon, \\ \forall v \in (Z_3 \times D)^* \ \forall x \in Z_3 \times D \colon d(v \cdot x) = d(v) \cdot f(x). \end{gathered}$$

In der Notation der Vorlesung ist d gerade f^{**}.

g)
- $\Phi(\epsilon) = \epsilon$
- $\Phi((\mathtt{1}, \mathtt{R})) = (\mathtt{1}, \mathtt{R})$
- $\Phi((\mathtt{1}, \mathtt{R})(\mathtt{0}, \mathtt{L})) = (\mathtt{0}, \mathtt{L})(\mathtt{1}, \mathtt{R})$
- $\Phi((\mathtt{1}, \mathtt{L})(\mathtt{0}, \mathtt{R})) = (\mathtt{1}, \mathtt{R})(\mathtt{0}, \mathtt{L})$
- $\Phi((\mathtt{0}, \mathtt{R})(\mathtt{1}, \mathtt{L})) = (\mathtt{0}, \mathtt{L})(\mathtt{1}, \mathtt{R})$
- $\Phi((\mathtt{0}, \mathtt{L})(\mathtt{1}, \mathtt{R})) = (\mathtt{0}, \mathtt{R})(\mathtt{1}, \mathtt{L})$
- $\Phi((\mathtt{2}, \mathtt{R})(\mathtt{1}, \mathtt{L})(\mathtt{0}, \mathtt{R})) = (\mathtt{1}, \mathtt{L})(\mathtt{2}, \mathtt{R})(\mathtt{0}, \mathtt{L})$
- $\Phi(\Phi((\mathtt{2}, \mathtt{R})(\mathtt{1}, \mathtt{L})(\mathtt{0}, \mathtt{R}))) = \Phi((\mathtt{1}, \mathtt{L})(\mathtt{2}, \mathtt{R})(\mathtt{0}, \mathtt{L})) = (\mathtt{1}, \mathtt{R})(\mathtt{0}, \mathtt{L})(\mathtt{2}, \mathtt{R})$
- $\Phi(\Phi(\Phi((\mathtt{2}, \mathtt{R})(\mathtt{1}, \mathtt{L})(\mathtt{0}, \mathtt{R})))) = \Phi((\mathtt{1}, \mathtt{R})(\mathtt{0}, \mathtt{L})(\mathtt{2}, \mathtt{R})) = (\mathtt{0}, \mathtt{L})(\mathtt{1}, \mathtt{R})(\mathtt{2}, \mathtt{L})$.

h) zunächst:

(i) Für jedes $w \in L_s$ gilt $d(c(w)) = w$ nach einer vorangegangenen Teilaufgabe, also $d(\Phi^0(c(w))) = w$. Für $k = 0$ gilt die Aussage also.
Für $k \in \mathbb{N}_+$ beweisen wir eine stärkere Aussage per vollständige Induktion. Nämlich die Folgende:

$$\forall k \in \mathbb{N}_+ \ \forall w \in L_s \ \forall \widetilde{w} \in (Z_3 \times D)^* \colon (d(\widetilde{w}) = w \implies d(\Phi^k(\widetilde{w})) = w).$$

Diese Aussage ist in der Tat stärker, da für jedes $w \in Z_3^*$ gilt $d(c(w)) = w$.
Induktionsanfang: Es sei $w \in L_s$ beliebig aber fest. Weiter sei $\widetilde{w} \in (Z_3 \times D)^*$ beliebig aber fest und derart, dass $d(\widetilde{w}) = w$. Ferner sei $i \in \mathbb{Z}_{|w|}$. Es gilt $f(\widetilde{w}_i) = d(\widetilde{w})_i = w_i$. In Anlehnung an die Definition von Φ unterscheiden wir drei Fälle:

Fall 1: $s(\widetilde{w}_i) = \mathtt{R} \land i \leq |\widetilde{w}| - 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(\Phi(\widetilde{w})_i) &= r(\min(t(f(\widetilde{w}_i)), t(f(\widetilde{w}_{i+1})))) \\ &= r(\min(t(w_i), t(w_{i+1}))). \end{aligned}$$

Wegen $w \in L_s$, ist $\min(t(w_i), t(w_{i+1})) = t(w_i)$. Somit gilt $f(\Phi(\widetilde{w})_i) = f(t(w_i)) = w_i$.

Fall 2: $s(\widetilde{w}_i) = \mathtt{L} \land i \geq 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(\Phi(\widetilde{w})_i) &= r(\max(t(f(\widetilde{w}_{i-1})), t(f(\widetilde{w}_i)))) \\ &= r(\max(t(w_{i-1}), t(w_i))). \end{aligned}$$

Wegen $w \in L_s$, ist $r(\max(t(w_{i-1}), t(w_i))) = r(t(w_i)) = w_i$. Somit gilt $f(\Phi(\widetilde{w})_i) = w_i$.

Fall 3: sonst. Dann gilt $f(\Phi(\widetilde{w})_i) = f(\widetilde{w}_i) = w_i$.

Insgesamt gilt also $f(\Phi(\widetilde{w})_i) = w_i$. Da i beliebig gewählt war folgt $d(\Phi(\widetilde{w})) = w$.

Induktionsvoraussetzung: Es sei $k \in \mathbb{N}_+$ beliebig aber fest und derart, dass gilt:

$$\forall w \in L_s\ \forall \widetilde{w} \in (Z_3 \times D)^*\colon (d(\widetilde{w}) = w \implies d(\Phi^k(\widetilde{w})) = w).$$

Induktionsschluss: Es sei $w \in L_s$ beliebig aber fest. Weiter sei $\widetilde{w} \in (Z_3 \times D)^*$ beliebig aber fest und derart, dass $d(\widetilde{w}) = w$. Nach der Definition von Potenzen von Abbildungen gilt

$$d(\Phi^{k+1}(\widetilde{w})) = d(\Phi^k(\Phi(\widetilde{w}))).$$

Nach dem Induktionsanfang gilt $d(\Phi(\widetilde{w})) = w$. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt also

$$d(\Phi^k(\Phi(\widetilde{w}))) = w.$$

Zusammen erhalten wir

$$d(\Phi^{k+1}(\widetilde{w})) = w.$$

Bemerkung: Der entscheidenende Schritt im Beweis der ursprünglichen Aussage ist es eine stärkere Aussage per Induktion zu beweisen. Der Induktionsschritt hätte ohne die vorige Verallgemeinerung der Aussage nicht geführt werden können!

(ii) Es sei $w \in Z_3^* \setminus L_s$. Dann gibt es ein kleinstes $i \in \mathbb{Z}_{|w|}$ derart, dass $t(w_i) > t(w_{i+1})$; insbesonder $w_i \neq w_{i+1}$. Somit gilt $t(f(c(w)_i)) = t(w_i) > t(w_{i+1}) = t(f(c(w)_{i+1}))$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: i ist gerade. Dann ist $s(c(w)_i) = \mathtt{R}$ und $s(c(w)_{i+1}) = \mathtt{L}$. Also gilt

$$\begin{aligned} f(\Phi(c(w))_i) &= r(\min(t(f(c(w)_i)), t(f(c(w)_{i+1})))) \\ &= r(\min(t(w_i), t(w_{i+1}))) \\ &= r(t(w_{i+1})) \\ &= w_{i+1}. \end{aligned}$$

Da $w_{i+1} \neq w_i$, folgt $f(\Phi(c(w))_i) \neq w_i$, also $d(\Phi(c(w))) \neq w$.

Fall 2: i ist ungerade. Dann ist $s(c(w)_i) = \mathtt{L}$ und $s(c(w)_{i+1}) = \mathtt{R}$. Nach der Wahl von i als kleinstes, gilt $t(w_{i-1}) \leq t(w_i)$. Also gilt $f(\Phi(c(w))_i) = w_i$. Außerdem gilt $t(f(\Phi(c(w))_{i+1})) \leq t(w_{i+1}) < t(w_i)$; insbesondere $f(\Phi(c(w))_{i+1}) \neq w_i$. Wie für den ersten Fall sieht man:

$$f(\Phi^2(c(w))_i) = f(\Phi(c(w))_{i+1}).$$

Also gilt $f(\Phi^2(c(w))_i) \neq w_i$ und damit $\Phi^2(c(w)) \neq w$.

Insgesamt gilt $d(\Phi(c(w))) \neq w \vee \Phi^2(c(w)) \neq w$.

***Aufgabe 3.4 (2 + 2 + 1 = 5 Extrapunkte)**

Fortsetzung von Aufgabe 3.3.

i) Zeigen Sie, dass für jedes Wort $w \in Z_3^*$ und jede nicht-negative ganze Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ gilt
$$\mathrm{Num}_3(d(\Phi^k(c(w)))) \leq \mathrm{Num}_3(d(c(w))).$$
Zeigen Sie außerdem, dass für jedes Wort $w \in Z_3^* \setminus L_s$ gilt
$$\mathrm{Num}_3(d(\Phi^2(c(w)))) \leq \mathrm{Num}_3(d(c(w))) - 1.$$

j) Folgern Sie aus den Teilaufgaben 3.3 h) und 3.4 i), dass es für jedes Wort $w \in Z_3^*$ genau eine nicht-negative ganze Zahl $k_w \in \mathbb{N}_0$ gibt derart, dass
$$\begin{aligned} \forall j \in \mathbb{N}_0\colon\ & (j < k_w \implies d(\Phi^j(c(w))) \notin L_s) \\ & \wedge (j \geq k_w \implies d(\Phi^j(c(w))) \in L_s). \end{aligned}$$

k) Zeigen Sie, dass für jedes Wort $w \in Z_3^*$ gilt
$$d(\Phi^{k_w}(c(w))) = 0^{\mathrm{N}_0(w)} \cdot 1^{\mathrm{N}_1(w)} \cdot 2^{\mathrm{N}_2(w)}.$$
Möglicherweise ist es hilfreich zuvor zu zeigen, dass für jedes Wort $w \in Z_3^*$ gilt
$$\forall i \in Z_3 \forall k \in \mathbb{N}_0\colon\ \mathrm{N}_i(w) = \mathrm{N}_i(d(\Phi^k(c(w)))).$$

Für jede positive ganze Zahl $n \in \mathbb{N}_+$ kann unsere Variante von Odd-Even Transposition Sort auf natürliche Weise auf Z_n anstelle von Z_3 verallgemeinert werden.

Lösung 3.4

Hier nur die Beweisideen.

i) Für jedes Wort $w \in L_s$ wissen wir aus der vorangegangenen Aufgabe, dass die erste Aussage gilt; es gilt sogar Gleichheit. Wir müssen also nur noch Wörter aus $Z_3^* \setminus L_s$ betrachten. Anstelle der ersten Aussage für Wörter aus $Z_3^* \setminus L_s$ beweist man die stärkere Aussage
$$\begin{aligned} &\forall k \in \mathbb{N}_0\ \forall w \in Z_3^* \setminus L_s\ \forall \widetilde{w} \in (Z_3 \times D)^*\colon \\ &\qquad (d(\widetilde{w}) = w \implies \mathrm{Num}_3(d(\Phi^k(\widetilde{w}))) \leq \mathrm{Num}_3(d(\widetilde{w}))) \end{aligned}$$
per vollständige Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$. Als Induktionsanfang beweist man die Fälle $k \in \{0, 1\}$. Im Induktionsschritt verwendet man die Induktionsvoraussetzung und den Induktionsanfang für $k = 1$. Den Induktionsanfang für $k = 1$ führt man indem man den kleinsten Index $i \in \mathbb{Z}_{|w|}$ wählt für den gilt $f(\Phi(\widetilde{w})_i) \neq w_i$; dann gilt $t(f(\Phi(\widetilde{w})_i)) < t(w_i)$; und da i bei der Interpretation von w als Ternärdarstellung die höchstwertigste Stelle ist, folgt $\mathrm{Num}_3(d(\Phi^k(\widetilde{w}))) \leq \mathrm{Num}_3(w) = \mathrm{Num}_3(d(\widetilde{w}))$, unabhängig davon, ob sich niederwertigere Stellen auch ändern.
Für die zweite Aussage nutzt man dieselbe Überlegung und zeigt sie im selben Schema wie die letzte Teilaufgabe von Aufgabe 3.3.

j) Es sei $w \in Z_3^*$. Ist w ein Element von L_s, so ist 0 die gewünschte Zahl k_w nach Teilaufgaben 3.3 h). Für den anderen Fall sei $w \in Z_3^* \setminus L_s$. Nach Teilaufgabe 3.4 i) gilt $\mathrm{Num}_3(d(\Phi^2(c(w)))) \leq \mathrm{Num}_3(d(c(w))) - 1$. Ist $d(\Phi^2(c(w)))$ ebenfalls kein Element von L_s, so gilt nach derselben Teilaufgabe

$$\mathrm{Num}_3(d(\Phi^2(c(d(\Phi^2(c(w))))))) \leq \mathrm{Num}_3(d(c(d(\Phi^2(c(w)))))) - 1.$$

Wegen

$$\Phi^2(c(d(\Phi^2(c(w))))) = \Phi^2(\Phi^2(c(w))) = \Phi^4(c(w))$$

und

$$c(d(\Phi^2(c(w)))) = \Phi^2(c(w))$$

folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{Num}_3(d(\Phi^4(c(w)))) &\leq \mathrm{Num}_3(d(\Phi^2(c(w)))) - 1\\ &\leq (\mathrm{Num}_3(d(c(w))) - 1) - 1\\ &= \mathrm{Num}_3(d(c(w))) - 2.\end{aligned}$$

Ist $d(\Phi^4(c(w)))$ ebenfalls kein Element von L_s, so gilt abermals

$$\mathrm{Num}_3(d(\Phi^6(c(w)))) \leq \mathrm{Num}_3(d(c(w))) - 3.$$

Dieses Spiel führt man so weiter, bis es zwangsläufig nach endlich vielen Schritten stoppt. Warum? Da $\mathrm{Num}_3(d(\Phi^{2k}(c(w))))$ durch 0 nach unten beschränkt ist, muss es ein $k \in \mathbb{N}_0$ geben so, dass $d(\Phi^{2k}(c(w))) \in L_s$ ist. Falls $d(\Phi^{2k-1}(c(w))) \in L_s$, so ist $k_w = 2k - 1$ die gesuchte Zahl, andernfalls $k_w = 2k$.

k) Sobald man gezeigt hat, dass die Anzahl der Vorkommen eines Buchstaben konstant bleibt, folgt Darstellung

$$d(\Phi^{k_w}(c(w))) = \mathtt{0}^{\mathrm{N}_0(w)} \cdot \mathtt{1}^{\mathrm{N}_1(w)} \cdot \mathtt{2}^{\mathrm{N}_2(w)}$$

daraus, dass ein Wort in L_s eindeutig durch die Anzahl der Vorkommen von `0`, `1` und `2` in ihm bestimmt ist.

Das sich die Anzahl der Vorkommen eines Buchstaben nicht durch wiederholte Anwendung von Φ ändert, sieht man indem man anhand der Definition von Φ zeigt, dass wenn überhaupt etwas passiert, dann indem benachbarte Buchstaben ihre Plätze tauschen.