Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 6

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr. Name des Tutors:

Ausgabe: 26. November 2014

Abgabe: 5. Dezember 2014, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 6:	/ $16 + 4$
Blätter 1 – 6:	/ $99 + 17$

Vorbemerkung. Für alle Aufgaben auf diesem Blatt gelten die folgenden Annahmen, ohne dass sie jedes Mal erneut aufgeführt werden:

- Die Menge der möglichen Werte für eine Variable ist $\mathbb{Z}$, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes angegeben ist.
- Alle Variablen sind initialisiert. Der Anfangswert ist aber nicht immer explizit angegeben.
- Zu einer Anweisungsfolge S und einer Nachbedingung Q heißt P eine *schwächste Vorbedingung*, wenn $\{P\}\ S\ \{Q\}$ ein gültiges Hoare-Tripel ist und für jedes gültige Hoare-Tripel $\{P'\}\ S\ \{Q\}$ gilt: $P' \implies P$.
- Zu einer Anweisungsfolge S und einer Vorbedingung P heißt Q eine *stärkste Nachbedingung*, wenn $\{P\}\ S\ \{Q\}$ ein gültiges Hoare-Tripel ist und für jedes gültige Hoare-Tripel $\{P\}\ S\ \{Q'\}$ gilt: $Q \implies Q'$.

Aufgabe 6.1 (1 + 2 + 2 = 5 Punkte)

a) Es seien x und y zwei Variablen und es seien a und b zwei ganze Zahlen. Bestimmen Sie anhand des Hoare-Kalküls die schwächste Vorbedingung von

$$\begin{aligned}&x \leftarrow x + y\\&y \leftarrow x - y\\&x \leftarrow x - y\\&\{x = b \wedge y = a\}\end{aligned}$$

indem Sie vor jeder Zuweisung eine Zusicherung einfügen.

b) Es seien x und y zwei Variablen und es seien a und b zwei ganze Zahlen. Weiter bezeichne min die Abbildung

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \colon (u, v) \mapsto \begin{cases} u, & \text{falls } u < v, \\ v, & \text{falls } u \geq v, \end{cases}$$

und es bezeichne max die Abbildung

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \colon (u, v) \mapsto u + v - \min(u, v).$$

Geben Sie eine stärkste Nachbedingung Q von

$$\begin{aligned}&\{x = a \wedge y = b\}\\&\textbf{if } x < y \textbf{ then}\\&\qquad z \leftarrow x\\&\textbf{else}\\&\qquad z \leftarrow y\\&\textbf{fi}\end{aligned}$$

an.

c) Es sei n eine nicht-negative ganze Zahl, es sei A ein Alphabet und es sei y eine Variable, deren Wertebereich die Menge der Listen von n Wörtern ist, also die Menge der Abbildungen $\mathbb{Z}_n \to A^*$. Weiter seien a und b zwei Wörter über dem Alphabet A. Ferner seien i und j zwei nicht-negative ganze Zahlen so, dass $i \leq n-1$ und $j \leq n-1$. Geben Sie eine schwächste Vorbedingung von

$$\begin{aligned}&y[i] \leftarrow a\\&y[j] \leftarrow b\\&\{y[i] = a \wedge y[j] = b\}\end{aligned}$$

an.
Hinweis: Hier müssen Sie nachdenken. Schematisches Vorgehen hilft nicht.

Aufgabe 6.2 (1+2=3 Punkte)
In dieser Aufgabe geht es um bedingte Anweisungen der Form **if** B **then** S **fi**.

a) Drücken Sie eine solche Anweisung mithilfe einer bedingten Anweisung mit **else**-Teil aus. Sie dürfen die Variable y benutzen (die möglicherweise in B oder/und S vorkommt).
b) Geben Sie eine schwächste Bedingung an, unter der das Hoare-Tripel $\{P\}$ **if** B **then** S **fi** $\{Q\}$ gültig ist.

Aufgabe 6.3 (2+2=4 Punkte)
Anhand eines Minimalmaschinenprogramms wurde in der letzten Übung die folgende Schleife spezifiziert:

$$\begin{aligned}&\textbf{repeat}\\&\qquad S\\&\textbf{until } B \textbf{ end}\end{aligned}$$

a) Drücken Sie diese mithilfe einer **while**-Schleife aus. Zur Negierung eines booleschen Ausdrucks dürfen Sie das Schlüsselwort **not** verwenden.
b) Zeigen Sie mithilfe der vorangegangenen Teilaufgabe, dass aus der Gültigkeit des Hoare-Tripels

$$\{I \wedge \neg B\} S \{I\}$$

die Gültigkeit des Hoare-Tripels

$$\begin{aligned}&\{I \wedge \neg B\}\\&\textbf{repeat}\\&\qquad S\\&\textbf{until } B \textbf{ end}\\&\{I \wedge B\}\end{aligned}$$

folgt.

Aufgabe 6.4 (4 Punkte)
Es sei n eine positive ganze Zahl und es sei $a\colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}$ eine Abbildung. Weiter seien z und x zwei ganzzahlige Variablen. Zeigen Sie anhand des Hoare-Kalküls und mithilfe einer Schleifeninvariante, dass das folgende Hoare-Tripel gültig ist:

$$
\begin{array}{l}
\{\textbf{true}\} \\
z \leftarrow a(0) \\
x \leftarrow 1 \\
\textbf{while } x \leq n-1 \textbf{ do} \\
\quad \textbf{if } a(x) < z \textbf{ then} \\
\quad\quad z \leftarrow a(x) \\
\quad \textbf{else} \\
\quad\quad z \leftarrow z \\
\quad \textbf{fi} \\
\quad x \leftarrow x+1 \\
\textbf{od} \\
\{z = \min\limits_{i \in \mathbb{Z}_n} a(i)\}
\end{array}
$$

***Aufgabe 6.5 (4 Extrapunkte)**
Für jede ganze Zahl a bezeichne $p(a)$ die prädikatenlogische Formel

$$a \geq 2 \wedge \forall b \in \mathbb{Z}\colon (2 \leq b \wedge b \leq a \implies b \cdot b \neq a).$$

Es seien x und y zwei initialisierte ganzzahlwertige Variablen und es sei z eine boolesche Variable. Zeigen Sie anhand des Hoare-Kalküls und mithilfe einer Schleifeninvariante, dass das folgende Hoare-Tripel gültig ist:

$$
\begin{array}{l}
\{x \geq 2\} \\
z \leftarrow \textbf{true} \\
y \leftarrow 2 \\
\textbf{while } y \leq x \textbf{ do} \\
\quad \textbf{if } y \cdot y = x \textbf{ then} \\
\quad\quad z \leftarrow \textbf{false} \\
\quad \textbf{fi} \\
\quad y \leftarrow y+1 \\
\textbf{od} \\
\{z = p(x)\}
\end{array}
$$