Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 6

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.
	Name des Tutors:

Ausgabe: 26. November 2014

Abgabe: 5. Dezember 2014, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 6:	/ $16 + 5$
Blätter 1 – 6:	/ $99 + 18$

Vorbemerkung. Für alle Aufgaben auf diesem Blatt gelten die folgenden Annahmen, ohne dass sie jedes Mal erneut aufgeführt werden:

- Die Menge der möglichen Werte für eine Variable ist $\mathbb{Z}$, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes angegeben ist.
- Alle Variablen sind initialisiert. Der Anfangswert ist aber nicht immer explizit angegeben.
- Zu einer Anweisungsfolge S und einer Nachbedingung Q heißt P eine *schwächste Vorbedingung*, wenn $\{P\}\ S\ \{Q\}$ ein gültiges Hoare-Tripel ist und für jedes gültige Hoare-Tripel $\{P'\}\ S\ \{Q\}$ gilt: $P' \implies P$.
- Zu einer Anweisungsfolge S und einer Vorbedingung P heißt Q eine *stärkste Nachbedingung*, wenn $\{P\}\ S\ \{Q\}$ ein gültiges Hoare-Tripel ist und für jedes gültige Hoare-Tripel $\{P\}\ S\ \{Q'\}$ gilt: $Q \implies Q'$.

Aufgabe 6.1 (1 + 2 + 2 = 5 Punkte)

a) Es seien x und y zwei Variablen und es seien a und b zwei ganze Zahlen. Bestimmen Sie anhand des Hoare-Kalküls die schwächste Vorbedingung von

$$\begin{aligned}
&x \leftarrow x + y \\
&y \leftarrow x - y \\
&x \leftarrow x - y \\
&\{x = b \land y = a\}
\end{aligned}$$

indem Sie vor jeder Zuweisung eine Zusicherung einfügen.

b) Es seien x und y zwei Variablen und es seien a und b zwei ganze Zahlen. Weiter bezeichne min die Abbildung

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \colon (u, v) \mapsto \begin{cases} u, & \text{falls } u < v, \\ v, & \text{falls } u \geq v, \end{cases}$$

und es bezeichne max die Abbildung

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \colon (u, v) \mapsto u + v - \min(u, v).$$

Bestimmen Sie eine stärkste Nachbedingung Q von

$$\begin{aligned}
&\{x = a \land y = b\} \\
&\textbf{if } x < y \textbf{ then} \\
&\qquad z \leftarrow x \\
&\textbf{else} \\
&\qquad z \leftarrow y \\
&\textbf{fi}
\end{aligned}$$

c) Es sei n eine nicht-negative ganze Zahl, es sei A ein Alphabet und es sei y eine Variable, deren Wertebereich die Menge der Listen von n Wörtern ist, also die Menge der Abbildungen $\mathbb{Z}_n \to A^*$. Weiter seien a und b zwei Wörter über dem Alphabet A. Ferner seien i und j zwei nicht-negative ganze Zahlen so, dass $i \leq n-1$ und $j \leq n-1$. Bestimmen Sie eine schwächste Vorbedingung von

$$
\begin{aligned}
&y[i] \leftarrow a \\
&y[j] \leftarrow b \\
&\{y[i] = a \land y[j] = b\}
\end{aligned}
$$

Hinweis: Hier müssen Sie nachdenken. Schematisches Vorgehen hilft nicht.

Lösung 6.1

a) $x = a \land y = b$
b) $x = a \land y = b \land z = \min(a, b)$
c) $(i \neq j) \lor (i = j \land a = b)$

Aufgabe 6.2 (1+2=3 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es um bedingte Anweisungen der Form **if** B **then** S **fi**.

a) Drücken Sie eine solche Anweisung mithilfe einer bedingten Anweisung mit **else**-Teil aus. Sie dürfen die Variable y benutzen (die möglicherweise in B oder/und S vorkommt).
b) Geben Sie eine schwächste Bedingung an, unter der das Hoare-Tripel $\{P\}$ **if** B **then** S **fi** $\{Q\}$ gültig ist.

Aufgabe 6.3 (4 Punkte)

Anhand eines Minimalmaschinenprogramms wurde in der letzten Übung die folgende Schleife spezifiziert:

$$
\begin{aligned}
&\textbf{repeat} \\
&\quad S \\
&\textbf{until } B \textbf{ end}
\end{aligned}
$$

a) Drücken Sie diese mithilfe einer **while**-Schleife aus. Zur Negierung eines booleschen Ausdrucks dürfen Sie das Schlüsselwort **not** verwenden.
b) Zeigen Sie mithilfe der vorangegangenen Teilaufgabe, dass aus der Gültigkeit des Hoare-Tripels

$$\{I \land \neg B\} S \{I\}$$

die Gültigkeit des Hoare-Tripels

$$
\begin{aligned}
&\{I \land \neg B\} \\
&\textbf{repeat} \\
&\quad S \\
&\textbf{until } B \textbf{ end} \\
&\{I \land B\}
\end{aligned}
$$

folgt.

Lösung 6.3

a)

S
while not B **do**
    S
od

b) Es sei $\{I \wedge \neg B\}S\{I\}$ gültig. Wir müssen zeigen, dass

$\{I \wedge \neg B\}$
S
while not B **do**
    S
od
$\{I \wedge B\}$

gültig ist. Aus dem Kapitel über Schleifeninvarianten aus der Vorlesung wissen wir, dass

$\{I\}$
while not B **do**
    S
od
$\{I \wedge B\}$

gültig ist. Nach der Sequenzen-Regel genügt es also zu zeigen, dass

$\{I \wedge \neg B\}$
S
$\{I\}$

gültig ist. Das gilt jedoch nach Voraussetzung.

Aufgabe 6.4 (4 Punkte)

Es sei n eine nicht-negative ganze Zahl und es sei $a\colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}$ eine Abbildung. Weiter seien z und x zwei ganzzahlige Variablen. Zeigen Sie anhand des Hoare-Kalküls und mithilfe einer Schleifeninvariante, dass das folgende Hoare-Tripel gültig ist:

$$
\begin{array}{l}
\{\textbf{true}\} \\
z \leftarrow a(0) \\
x \leftarrow 1 \\
\textbf{while } x \leq n-1 \textbf{ do} \\
\quad \textbf{if } a(x) < z \textbf{ then} \\
\quad\quad z \leftarrow a(x) \\
\quad \textbf{else} \\
\quad\quad z \leftarrow z \\
\quad \textbf{fi} \\
\quad x \leftarrow x+1 \\
\textbf{od} \\
\{z = \min\limits_{i \in \mathbb{Z}_n} a(i)\}
\end{array}
$$

Lösung 6.4
Zu zeigen:

$$
\begin{array}{l}
\{z = a(0) \land x = 1\} \\
\textbf{while } x \leq n-1 \textbf{ do} \\
\quad \textbf{if } a(x) < z \textbf{ then} \\
\quad\quad z \leftarrow a(x) \\
\quad \textbf{else} \\
\quad\quad z \leftarrow z \\
\quad \textbf{fi} \\
\quad x \leftarrow x+1 \\
\textbf{od} \\
\{z = \min\limits_{i \in \mathbb{Z}_n} a(i)\}
\end{array}
$$

Schleifeninvariante: $z = \min_{i \in \mathbb{Z}_x} a(i) \land x \leq n$

***Aufgabe 6.5 (4 Extrapunkte)**
Für jede ganze Zahl a bezeichne $p(a)$ die prädikatenlogische Formel

$$a \geq 2 \land \forall b \in \mathbb{Z} \colon (2 \leq b \land b \leq a \implies b \cdot b \neq a).$$

Es seien x und y zwei initialisierte ganzzahlwertige Variablen und es sei z eine boolesche Variable. Zeigen Sie anhand des Hoare-Kalküls und mithilfe einer

Schleifeninvariante, dass das folgende Hoare-Tripel gültig ist:

$$
\begin{array}{l}
\{x \geq 2\} \\
z \leftarrow \textbf{true} \\
y \leftarrow 2 \\
\textbf{while } y \leq x \textbf{ do} \\
\quad \textbf{if } y \cdot y = x \textbf{ then} \\
\quad\quad z \leftarrow \textbf{false} \\
\quad \textbf{fi} \\
\quad y \leftarrow y + 1 \\
\textbf{od} \\
\{z = p(x)\}
\end{array}
$$

Lösung 6.5
Für jede ganze Zahl a und jede ganze Zahl c bezeichne $q(a, c)$ die prädikatenlogische Formel

$$a \geq 2 \wedge \forall b \in \mathbb{Z}\colon (2 \leq b \wedge b \leq c - 1 \implies b \cdot b \neq a).$$

Das gegebene Hoare-Tripel ist genau dann gültig, wenn das folgende Hoare-Tripel gültig ist:

$$
\begin{array}{l}
\{x \geq 2 \wedge z = \textbf{true} \wedge y = 2\} \\
\textbf{while } y \leq x \textbf{ do} \\
\quad \textbf{if } y \cdot y = x \textbf{ then} \\
\quad\quad z \leftarrow \textbf{false} \\
\quad \textbf{fi} \\
\quad y \leftarrow y + 1 \\
\textbf{od} \\
\{z = p(x)\}
\end{array}
$$

Als Schleifeninvariante wählen wir die prädikatenlogische Formel $z = q(x, y) \wedge y \leq x + 1$. Dies ist tatsächlich eine Schleifeninvariante:

a) Vor der Schleife ist $y = 2$, $z = \textbf{true}$ und $x \geq 2$. Somit ist $y \leq x + 1$. Außerdem ist für jedes $b \in \mathbb{Z}$ die Konjunktion $2 \leq b \wedge b \leq 2 - 1$ falsch. Somit ist für jedes $b \in \mathbb{Z}$ die Implikation $2 \leq b \wedge b \leq 2 - 1 \implies b \cdot b \neq x$ wahr. Damit ist die Formel $q(x, 2)$ wahr und folglich $\textbf{true} = q(x, 2)$ ebenfalls. Insgesamt gilt $z = q(x, y) \wedge y \leq x + 1$.
b) Zu Beginn des i-ten Schleifendurchlaufs gelte $z = q(x, y) \wedge y \leq x + 1$. Außerdem gilt die Schleifenbedingung $y \leq x$. Wir müssen zeigen, dass am Ende des i-ten Schleifendurchlaufs $z = q(x, y) \wedge y \leq x + 1$ gilt. Anders

ausgedrückt: Wir müssen zeigen, dass das folgende Hoare-Tripel gültig ist:

$$\{z = q(x,y) \land y \leq x+1 \land y \leq x\}$$
if $y \cdot y = x$ **then**
    $z \leftarrow$ **false**
fi
$y \leftarrow y+1$
$$\{z = q(x,y) \land y \leq x+1\}$$

Das ist äquivalent dazu, dass das folgende Hoare-Tripel gültig ist:

$$\{z = q(x,y) \land y \leq x\}$$
if $y \cdot y = x$ **then**
    $z \leftarrow$ **false**
fi
$$\{z = q(x,y+1) \land y+1 \leq x+1\}$$

Eine schwächste Vorbedingung von

if $y \cdot y = x$ **then**
    $z \leftarrow$ **false**
fi
$$\{z = q(x,y+1) \land y+1 \leq x+1\}$$

ist

$$(y \cdot y \neq x \implies z = q(x,y+1)) \land (y \cdot y = x \implies \textbf{false} = q(x,y+1)) \land y \leq x.$$

Die Aussage $y \cdot y \neq x \implies z = q(x,y+1)$ folgt aus

$$y \cdot y \neq x \land z = q(x,y).$$

Die Aussage $y \cdot y = x \implies \textbf{false} = q(x,y+1)$ gilt stets, folgt also insbesondere aus

$$y \cdot y = x \land z = q(x,y).$$

Damit folgt eine schwächste Vorbedingung aus $z = q(x,y) \land y \leq x$. Und damit sind unsere Hoare-Tripel gültig.

Am Ende der Schleife gilt die Negation der Schleifenbedingung, also $y > x$. Gemeinsam mit $y \leq x+1$ aus der Schleifeninvariante gilt also $y = x+1$. Außerdem gilt $z = q(x,y)$. Somit gilt $z = q(x,x+1)$. Wegen $q(x,x+1) = p(x)$ folgt $z = p(x)$.