# Grundbegriffe der Informatik
# Aufgabenblatt 7

| | |
|---|---|
| Matr.nr.: | |
| Nachname: | |
| Vorname: | |
| Tutorium: | Nr. |
| | Name des Tutors: |

Ausgabe: 3. Dezember 2014

Abgabe: 12. Dezember 2014, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

---

*Vom Tutor auszufüllen:*

erreichte Punkte

| | |
|---|---|
| Blatt 7: | $/ \; 15 + 0$ |
| Blätter 1 – 7: | $/ \; 114 + 17$ |

---

**Erinnerung.** Es sei $A$ ein Alphabet und es sei $w$ ein Wort über $A$.

- Für jeden Buchstaben $a \in A$ bezeichnet $N_a(w)$ die Anzahl der Vorkommen von $a$ in $w$.
- Für jedes Wort $p \in A^*$ heißt $p$ genau dann *Präfix von $w$*, wenn es ein Wort $v \in A^*$ gibt derart, dass $p \cdot v = w$ gilt.

**Aufgabe 7.1 (3 Punkte)**
Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G$ an, die die formale Sprache

$$L(G) = \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 \colon w = \mathtt{a}^{n+1}\mathtt{b}^{3+5n}\}$$

erzeugt.

**Lösung 7.1**
Die Grammatik $G = (N, T, \mathtt{S}, P)$ mit den Nichtterminalsymbolen $\{\mathtt{S}\}$, den Terminalsymbolen $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und den Produktionen $P = \{\mathtt{S} \to \mathtt{aSbbbbb} \mid \mathtt{abbb}\}$ leistet das Gewünschte.

**Aufgabe 7.2 (2 Punkte)**
Es sei $L$ die Sprache über dem Alphabet $\{\mathtt{(}, \mathtt{)}\}$, die genau die Wörter $w$ enthält, für die gilt:

$$N_{\mathtt{(}}(w) = N_{\mathtt{)}}(w)$$
$$\text{und für jedes Präfix } p \text{ von } w\colon N_{\mathtt{(}}(p) \geq N_{\mathtt{)}}(p)\ .$$

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G$ an, die $L$ erzeugt.

**Lösung 7.2**
Die Sprache $L$ ist die Sprache aller wohlgeformten Klammerausdrücke. Sie wird erzeugt von der kontextfreien Grammatik $G = (N, T, \mathtt{S}, P)$, wobei $N = \{\mathtt{S}\}$, $T = \{\mathtt{(}, \mathtt{)}\}$ und $P = \{\mathtt{S} \to \mathtt{SS} \mid \mathtt{(S)} \mid \epsilon\}$.

**Aufgabe 7.3 (1+2+2=5 Punkte)**
Gegeben sei die Grammatik $G = (\{\mathtt{E}\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \mathtt{E}, \{\ \mathtt{E} \to \mathtt{EE} \mid \mathtt{aEb} \mid \mathtt{bEa} \mid \varepsilon\ \})$.

a) Geben Sie die formale Sprache $L$ an, die von $G$ erzeugt wird (ohne auf $G$ Bezug zu nehmen).
b) Beweisen Sie, dass jedes von $G$ erzeugte Wort $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ in $L$ liegt.
c) Wie kann man für ein beliebiges Wort $w \in L$ eine Ableitung in $G$ finden?

**Lösung 7.3**

a) $L = \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid N_{\mathtt{a}}(w) = N_{\mathtt{b}}(w)\}$
b) Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: für alle $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{E}\}^*$ gilt : Wenn $\mathtt{E} \Longrightarrow^n w$ gilt, dann ist $N_{\mathtt{a}}(w) = N_{\mathtt{b}}(w)$.
IA $n = 0$: dann gilt $\mathtt{E} \Longrightarrow^n w$ nur für $w = \mathtt{E}$ und offensichtlich ist $N_{\mathtt{a}}(w) = 0 = N_{\mathtt{b}}(w)$.

IV: für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte

$$\forall i \leq n\colon \forall w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{E}\}^*\colon \text{ wenn } \mathtt{E} \Longrightarrow^i w \text{ dann } N_{\mathtt{a}}(w) = N_{\mathtt{b}}(w)$$

IS: $n \rightsquigarrow n+1$: sei $w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{E}\}^*$ beliebig.
Wenn $\mathtt{E} \Longrightarrow^{n+1} w$, dann $\mathtt{E} \Longrightarrow v \Longrightarrow^n w$ und für $v$ gibt es vier Möglichkeiten:

- $v = \mathtt{EE}$. Dann ist $w = w_1w_2$ mit $\mathtt{E} \Longrightarrow^{i_1} w_1$ und $\mathtt{E} \Longrightarrow^{i_2} w_2$ für $i_1, i_2 \leq n$. Nach IV ist $N_{\mathtt{a}}(w_1) = N_{\mathtt{b}}(w_1)$ und $N_{\mathtt{a}}(w_2) = N_{\mathtt{b}}(w_2)$ und folglich auch

$$N_{\mathtt{a}}(w) = N_{\mathtt{a}}(w_1) + N_{\mathtt{a}}(w_2) = N_{\mathtt{b}}(w_1) + N_{\mathtt{b}}(w_2) = N_{\mathtt{b}}(w)$$

- $v = \mathtt{aEb}$. Dann ist $w = \mathtt{a}w_1\mathtt{b}$ mit $\mathtt{E} \Longrightarrow^i w_1$ für $i \leq n$. Nach IV ist $N_{\mathtt{a}}(w_1) = N_{\mathtt{b}}(w_1)$ und folglich auch

$$N_{\mathtt{a}}(w) = 1 + N_{\mathtt{a}}(w_1) = 1 + N_{\mathtt{b}}(w_1) = N_{\mathtt{b}}(w)$$

- $v = \mathtt{bEa}$: analog
- $v = \varepsilon$: dann ist auch $w = \varepsilon$ und offensichtlich $N_{\mathtt{a}}(w) = 0 = N_{\mathtt{b}}(w)$

*Alternativ* kann man auch argumentieren, dass die Anwendung jeder Produktion entweder $N_{\mathtt{a}}$ und $N_{\mathtt{b}}$ unverändert lässt, oder beide Zahlen um 1 erhöht. Da für das Startsymbol offensichtlich beide Anzahlen gleich sind (nämlich 0), bleibt diese Eigenschaft auch im Laufe einer Ableitung erhalten (Induktion) und sie gilt folglich auch für die ableitbaren Wörter aus Terminalsymbolen.

c) $w = \varepsilon$ ist trivial: $\mathtt{E} \Longrightarrow \varepsilon$.
Sei $w \neq \varepsilon$. Man gehe $w$ von links durch und zerhacke es in *möglichst kurze nichtleere* Stücke $v$ mit der Eigenschaft $N_{\mathtt{a}}(v) = N_{\mathtt{b}}(v)$.
Jedes solche Stück hat die Eigenschaft, dass erstes und letzes Symbol voneinander *verschieden* sind, also $v = \mathtt{a}v'\mathtt{b}$ oder $v = \mathtt{b}v'\mathtt{a}$ und daher $N_{\mathtt{a}}(v') = N_{\mathtt{b}}(v')$.
Für diese $v'$ findet man erst mal analog Ableitungsbäume. Daraus ergeben sich mit Hilfe der Produktionen $\mathtt{E} \to \mathtt{aEb} \mid \mathtt{bEa}$ Ableitungsbäume für die $v'$.
Mit Hilfe der Produktion $\mathtt{E} \to \mathtt{EE}$ kann man daraus einen Ableitungsbaum für $w$ bauen.

**Aufgabe 7.4 (2 + 2 + 1 = 5 Punkte)**
Es sei $G = (N, T, \mathtt{S}, P)$ die Grammatik mit den Nichtterminalsymbolen $N = \{\mathtt{S}, \mathtt{T}\}$, den Terminalsymbolen $T = \{\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}, \mathtt{+}, \mathtt{-}, \mathtt{*}, \mathtt{/}, \mathtt{(}, \mathtt{)}\}$, dem Startsymbol $\mathtt{S}$ und den Produktionen

$$\begin{aligned} P = \{&\mathtt{S} \to \mathtt{T} \mid \mathtt{S+T} \mid \mathtt{S-T} \mid \mathtt{S*T} \mid \mathtt{S/T}, \\ &\mathtt{T} \to \mathtt{(S)} \mid \mathtt{x} \mid \mathtt{y} \mid \mathtt{z}\}. \end{aligned}$$

a) Leiten Sie aus dem Startsymbol das Wort `(x + y) * z - x` ab. Wenden Sie dabei in jedem Ableitungsschritt eine Produktion auf das am weitesten rechts stehende Nichtterminalsymbol an.

b) Zeichnen Sie den Ableitungsbaum für das Wort `x * (y / z)`.

c) Die obige Grammatik $G$ hat gegenüber der Grammatik $G' = (N, T, \mathtt{S}, P')$ mit den Produktionen

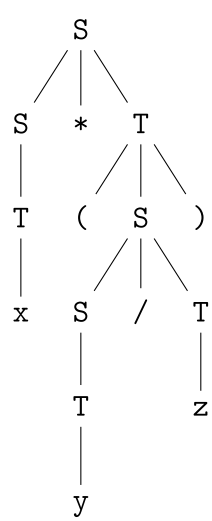
$$P' = \{\mathtt{S} \rightarrow \mathtt{(S)} \mid \mathtt{S+S} \mid \mathtt{S-S} \mid \mathtt{S*S} \mid \mathtt{S/S} \mid \mathtt{x} \mid \mathtt{y} \mid \mathtt{z}\},$$

einen Vorteil. Welcher ist das?

**Lösung 7.4**

a) Eine mögliche Ableitung ist

$$\begin{aligned}
\mathtt{S} &\Rightarrow \mathtt{S\ -\ T} \\
&\Rightarrow \mathtt{S\ -\ x} \\
&\Rightarrow \mathtt{S\ *\ T\ -\ x} \\
&\Rightarrow \mathtt{S\ *\ z\ -\ x} \\
&\Rightarrow \mathtt{T\ *\ z\ -\ x} \\
&\Rightarrow \mathtt{(\ S\ )\ *\ z\ -\ x} \\
&\Rightarrow \mathtt{(\ S\ +\ T\ )\ *\ z\ -\ x} \\
&\Rightarrow \mathtt{(\ S\ +\ y\ )\ *\ z\ -\ x} \\
&\Rightarrow \mathtt{(\ T\ +\ y\ )\ *\ z\ -\ x} \\
&\Rightarrow \mathtt{(\ x\ +\ y\ )\ *\ z\ -\ x}
\end{aligned}$$

b) 


c) Für manche Wörter gibt es bei $G'$ mehrere Ableitungsbäume, bei $G$ ist er eindeutig.
Die Grammatik $G$ ist nicht mehrdeutig, das heißt, jedes Wort in $L(G)$ kann auf genau eine Weise aus dem Startsymbol von rechts abgeleitet werden. Dabei bedeutet *ableiten von rechts*, dass in jedem Ableitungsschritt eine Produktion auf das am weitesten rechts stehende Nichtterminalsymbol angewendet wird.