Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 8

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.
	Name des Tutors:

Ausgabe: 10. Dezember 2014

Abgabe: 19. Dezember 2014, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

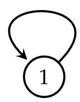
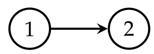
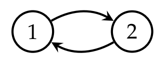
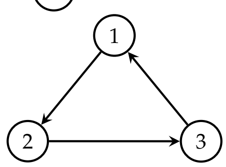
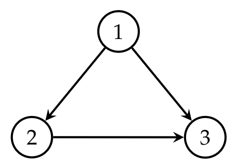
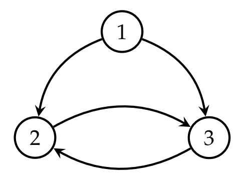
Blatt 8:	/ $20 + 0$
Blätter 1 – 8:	/ $134 + 17$

Aufgabe 8.1 ((0.5 + 0.5 + 1 + 1 + 1 + 1) + 2 = 7 Punkte)
Für einen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ bezeichnet $\mathrm{Aut}(G)$ die Menge aller Isomorphismen von G nach G, das heißt,

$$\mathrm{Aut}(G) = \{f \colon V \to V \text{ bijektiv} \mid \forall x \in V \; \forall y \in V : (x, y) \in E \iff (f(x), f(y)) \in E\}.$$

Jedes Element von $\mathrm{Aut}(G)$ heißt *Automorphismus von* G und das Tupel $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ heißt *Automorphismengruppe von* G.

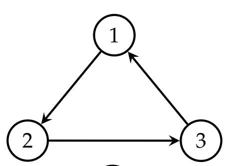
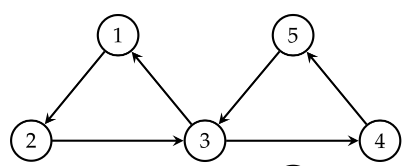
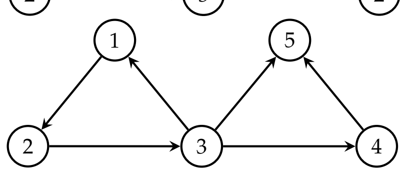
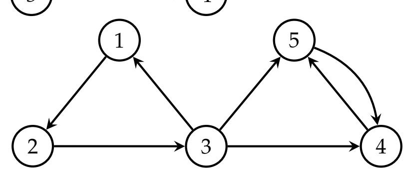
i) Geben Sie die Automorphismen der folgenden Graphen an:

a) 
b) 
c) 
d) 
e) 
f) 

ii) Es sei n eine ganze Zahl mit $n \geq 2$. Geben Sie vier verschiedene Graphen $G_i = (V_i, E_i)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, an so, dass für jedes $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt: $|V_i| = n$ und $\mathrm{Aut}(G_i) = \{f \colon V_i \to V_i \mid f \text{ ist bijektiv}\}$.

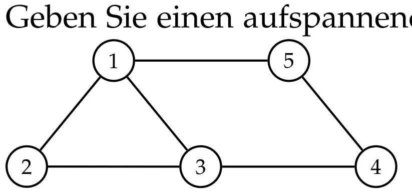
Aufgabe 8.2 (1 + 1 + 1 + 1 = 4 Punkte)
Für einen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ heißt ein Teilgraph $G' = (V', E')$ von G genau dann *strenge Zusammenhangskomponente von* G, wenn G' streng zusammenhängend ist und für jeden streng zusammenhängenden Teilgraphen $G'' = (V'', E'')$ von G entweder $V' \cap V'' = \emptyset$ oder $V'' \subseteq V' \wedge E'' \subseteq E'$ gilt.

Geben Sie die strengen Zusammenhangskomponenten der folgenden Graphen an:

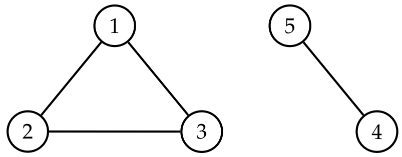
a) 
b) 
c) 
d) 

Aufgabe 8.3 (1 + 1 = 2 Punkte)
Für einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ heißt ein Teilgraph $G' = (V', E')$ von G genau dann *aufspannender Baum*, wenn G' ein Baum ist und $V' = V$ gilt.

a) Geben Sie einen aufspannenden Baum des folgenden Graphen an:



b) Geben Sie für jede Zusammenhangskomponente des folgenden Graphen einen aufspannenden Baum an:



Dabei heißt ein Teilgraph G' eines ungerichteten Graphen G genau dann *Zusammenhangskomponente von* G, wenn der zu G' gehörige gerichtete Graph eine strenge Zusammenhangskomponente des zu G gehörigen gerichteten Graphen ist.

Aufgabe 8.4 (1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 7 Punkte)
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei der gerichtete Graph $G_n = (V_n, E_n)$ gegeben durch

$$V_n = \{i \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq i \leq n\},$$
$$E_n = \{(i, j) \in V_n \times V_n \mid (i \leq n - 1 \wedge j = i + 1) \vee (i = n \wedge j = 1)\}.$$

a) Zeichnen Sie G_1, G_2 und G_5.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $E_{n,k}$ induktiv definiert durch

$$E_{n,1} = E_n,$$
$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : E_{n,k} = E_n \circ E_{n,k-1};$$

Ferner sei $G_{n,k}$ der gerichtete Graph $(V_n, E_{n,k})$.

b) Zeichnen Sie $G_{5,2}$ und $G_{6,2}$.
c) Geben Sie $E_{n,2}$ in einer Form analog zur Definition von E_n an.
d) Beweisen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: Der Graph $G_{n,2}$ ist genau dann streng zusammenhängend, wenn die Knotenanzahl n ungerade ist.
e) Wie viele strenge Zusammenhangskomponenten hat $G_{n,3}$ und wie viele Knoten und Kanten haben diese jeweils?